# Введение. Логические операции. Формулы логики. Таблица истинности

***План***

1. Введение
2. Понятие о высказываниях и логические операции над ними
3. Формулы алгебры высказываний
4. Основные виды формул алгебры высказываний

***1. Введение.***

Термин "логика" происходит от греческого слова Logos , что означает "мысль", "разум", "слово", "понятие". Логика как наука изучает мышление. Логика есть наука о законах и формах правильного мышления. Она изучает формы рассуждений, отвлекаясь от их конкретного содержания; устанавливает, что из чего следует, ищет ответ на вопрос: как мы рассуждаем?

Математическая логика – это наука, с одной стороны, применила математические методы для изучения общих структур (форм) правильного мышления и тем самым сформировалась как раздел математики. С другой стороны, математическая логика сделала предметом своего изучения процесс доказательства математических теорем. Математическая логика явилась, таким образом, инструментом для исследований в области основной математики.

Изучение математической логики способствует воспитанию культуры логического мышления. Ее основой является осознание структуры математической науки, существа ее фундаментальных понятий: аксиомы, доказательства, теоремы.

Математическая логика способствует ясности мысли в вопросах математики, повышению требовательности к себе в отношении точности формулировок теорем, обоснованности аргументации в доказательствах. Ясность мысли приводит к ясности изложения.

Наконец, широчайшее распространение компьютеров, проникающих буквально во все сферы нашей жизни, т. е. понимание возможностей компьютера и умения взаимодействовать с ним. Важнейшей составной частью этой культуры является, в первую очередь, способность и умение мыслить алгоритмически, т. е. весьма отчетливо и недвусмысленно определять последовательность своих действий при решении той или иной задачи.

***2. Понятие о высказываниях и логические операции над ними.***

Понятие "высказывание" является одним из основных понятий в математической логике.

Под ***высказыванием*** понимается всякое повествовательное предложение – утверждение, о котором можно сказать одно из двух: либо оно истинно, либо ложно.

*Пример.*

1) Мичуринск – город Липецкой области. (Л или 0).
2) Число 5 меньше 10. (И или 1).

Однако не всякое повествовательное предложение есть высказывание.

- Предложение, которое выражает субъективное мнение, не считается высказыванием.
- Не является высказыванием определения тех или иных понятий.

*Пример.*

1) Овсяная каша – вкусная.
2) Четырехугольник, у которого все стороны равны, называется ромбом.

Условимся высказывания обозначать большими буквами A, B, C, …

Если высказывание A истинно, то говорят, что значение высказывания A истинно и записывается так:

$$\mathbf{A = 1}$$

Если высказывание B ложно, то говорят, что высказывание B ложно и записывается так:

$$\mathbf{B = 0.}$$

В обычной речи**,** имея 2 предложения, мы с помощью союзов образуем сложные предложения – высказывания, которые можно рассматривать как особые величины. Поэтому нужно ввести для них соответствующие действия, которые назовем логическими операциями.

1. ***Отрицанием*** высказывания А называется высказывание $\overline{A}$ (чит: не "а"), которое истинно тогда, когда А ложно, и ложно, когда А истинно.

2. ***Конъюнкцией*** высказываний А и В называется высказывание $A \bigcap B$ (чит: а и б), которое истинно тогда, когда оба высказывания истинны; и ложно во всех остальных случаях.

3. ***Дизъюнкцией*** высказываний А и В называется высказывание $A \bigcup B$ (чит: а или б), которое ложно тогда, когда оба высказывания ложны; и истинно во всех остальных случаях.

4. ***Импликацией*** высказываний А и В называется высказывание $A \rightarrow B$ (чит: А имплицирует В или из А следует В), которое ложно тогда , когда А истинно , а В ложно; и истинно во всех остальных случаях.

5. ***Эквивалентностью*** высказываний А и В называется высказывание $A \leftrightarrow B$ (чит: А эквивалентно В или А равносильно В), которое истинно тогда, когда оба высказывания либо истинны, либо ложны; и ложно в остальных случаях.

На множестве всех высказываний вы ввели логические операции 1 – 5 над ними, результаты выполнения которой можно наглядно представить в виде таблицы, так называемой таблице истинности.

| **A** | **B** | $\overline{A}$ | **A⋀B** | **A⋁B** | **A→B** | **A↔B** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

***3. Формулы алгебры высказываний.***

Пусть А, В, С, …простые высказывания, принимающие одно из 2- ух значений: **И** или **Л.** с помощью логических операций 1 – 5 из них можно образовать более сложные высказывания

$$A \wedge B,\ A \rightarrow B,\ A \leftrightarrow B.$$

А из этих высказываний с помощью этих же операций можно образовать более сложные высказывания

$$((A \vee B) \wedge (A \rightarrow B),\ ((B \leftrightarrow C) \wedge \overline{A}).$$

Всякое сложное высказывание, составленное из простых высказываний с помощью логических операций, называется ***формулой*** алгебры логики.

В любой формуле большую роль играют скобки, которые, как и в обычной алгебре определяет порядок выполнения операций.

Простые высказывания могут иметь постоянные значения, т. е. быть истинным или ложным, но могут иметь и неопределенные значения, тогда такие высказывания называются ***переменными.***

*Пример.*

$X>10$ – переменное высказывание, т.к. при $X \geq 11$ – высказывание истинно, а при $X \leq 10$ – ложно.

Чтобы найти значение истинности в формулах от n высказываний надо составить для нее таблицу истинности и из последнего столбца узнать значение истинности.

Легко установить, что в таблице формулы от n высказываний содержится $2^n$ строк истинности и плюс одна общая строка, а число столбцов в таблице равно числу высказываний плюс число операций в формуле.

*Пример.* Составить таблицу истинности для формулы:

$$F(X, Y, Z) = ((X \rightarrow Y) \wedge Z) \vee \overline{Y}$$

| **X** | **Y** | **Z** | **X→Y** | **(X→Y) ⋀Z** | $\overline{Y}$ | **((X→Y) ⋀ Z)**$\bigcup \overline{Y}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Из последнего столбца следует, что наша формула при всех возможных значениях истинности высказываний 6 раз принимает значение истины и 2 раза значение лжи.

***4. Основные виды формул алгебры высказываний.***

Введем на множестве высказываний формул следующие определения

Формула называется ***выполнимой (опровержимой)***, если она хотя бы один раз принимает значение истины (лжи), при любом наборе значений переменной X, входящих в неё.

Формула алгебры высказываний называется ***тождественно истинной или тафталогией***, если при любых наборах значений переменных, входящих в нее она принимает значение истины.

Обозначение **ТИ** – тождественно истинная.

Формула алгебры высказываний называется тождественно ложной или противоречивой, если она принимает значение лжи при всех наборах значений переменных $x_i$, входящих в неё. **ТЛ**

Чтобы установить вид данной формулы алгебры высказываний достаточно составить для неё соответственную таблицу истинности и по её последнему столбцу определить вид данной формулы.

***Контрольные вопросы***

1. Что обозначает термин «логика»?
2. Для чего служит математическая логика?
3. Как математическая логика связана с информатикой?
4. Что называется высказыванием?
5. Какие повествовательные предложения не являются высказываниями?
6. Что называется отрицанием высказывания?
7. Что называется дизъюнкцией двух высказываний?
8. Что называется конъюнкцией двух высказываний?
9. Что называется импликацией двух высказываний?
10. Что называется эквивалентностью двух высказываний?
11. Что называется формулой алгебры высказываний?
12. Какие виды формул вы знаете?
13. Как определить вид формулы алгебры высказывания?

***Домашнее задание***

1. Конспект учить.
2. Упражнение 2.17 с. 59

Составить таблицы истинности для формул и определить их вид

а) $(A \to B) \leftrightarrow (A \vee C)$

б) $A \to (B \to C)$

в) $(A \leftrightarrow B) \to (B \vee C)$

г) $(A \to B) \leftrightarrow (A \vee C)$

д) $(A \leftrightarrow B) \to (B \wedge C)$

е) $(A \to B) \leftrightarrow (A \wedge C)$

***Литература***

Гончаров Г.А., Мочалин А.А. Элементы дискретной математики: Учебное пособие. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2004. – 128с.