Тема: Полные системы булевых функций. Многочлен Жегалкина. Теорема Поста.

Теоретическая часть

Таблицы истинности булевых функций с ростом числа аргументов становятся громоздкими и неудобными. Более удобный аналитический способ задания булевых функций основан на рассмотрении двузначной алгебры Поста, с операцией суперпозиции над множеством булевых функций.

Принцип суперпозиции

Определение 1: Функцию f, соответствующую формуле F, называют суперпозицией функции из множества функций, а процесс получения функции из множества функций будем называть операцией суперпозиции.

Пример.

$F_1=(((x_1x_2)+x_1)+x_2)$ строится за три шага:

a) (x_1x_2)
b) $((x_1x_2)+x_1)$
c) $(((x_1x_2)+x_1)+x_2)=F_1$

x_1	x_2	x_1x_2	$(x_1x_2)+x_1$	$((x_1x_2)+x_1)+x_2$
0	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

При составлении сложных логических высказываний из простых используется принцип суперпозиции, т.е. подстановка в функцию вместо ее аргумента других функций. Вместо любой переменной используется как «собственно» независимая переменная, аргумент, так и переменная, являющаяся функцией других переменных. Принцип суперпозиции позволяет на основе трех основных элементарных функций (отрицание, конъюнкция, дизъюнкция) получать сложные логические высказывания, описывающие функционирование цифровых систем и автоматов.

Определение 2: Система булевых функций{f1,…,fm}называется **полной**, если любая булева функция может быть выражена через функции f1,…,fm с помощью суперпозиций (т.е. составления сложных функций).

Утверждение 1: Пусть даны две системы функций:

$$A=\{f_1,f_2,\dots,f_m\} \qquad (1)$$

$$B=\{g_1,g_2,\dots,g_m\} \qquad (2)$$

относительно которых известно, что система (1) полная и каждая ее функция выражается с помощью суперпозиции через функции системы (2). Тогда система (2) также является полной.

Многочлен Жегалкина.

Одной из интересных систем является набор Жегалкина ($\oplus$, $\bullet$, 1)

В алгебре логики теорема Жегалкина играет важную роль.

Определение 3: Любая переключательная функция f может быть представлена при помощи полинома по «mod 2» (полинома Жегалкина).

Полином Жегалкина – канонический многочлен.

$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=k_0+k_1x_1+k_2x_2+k_3x_1x_2+\ldots+k_nx_1x_2\ldots x_n$,

где $k_1\ldots k_s$ – коэффициенты, которые принимают значения 0 или 1.

Пример.

Выразить x_1+x_2 в виде композиции полиномов Жегалкина.

Ищем выражение для x_1+x_2 в виде полинома с неопределенными коэффициентами:

$$x_1+x_2=ax_1x_2+bx_1+cx_2+d,$$

при $x_1=x_2=0$ имеем $0=d$;

при $x_1=0$, $x_2=1$ имеем $1=c$;

при $x_1=1$, $x_2=0$ имеем $1=b$;

при $x_1=x_2=1$ имеем $1=a+b+c$.

Тогда окончательно:

$$x_1+x_2=x_1x_2+x_1+x_2.$$

Каждая булева функция может быть представлена многочленом Жегалкина.

Поскольку число различных булевых функций от n переменных равно 2^{2^n} и число различных многочленов Жегалкина от n переменных также равно 2^{2^n}, то представление булевой функции многочленом Жегалкина единственно.

Утверждение 1 дает лишь достаточное условие полноты системы булевых функций.

Перейдем теперь к установлению критерия полноты системы булевых функций.

Определение 4: Множество (класс) К булевых функций называется **функционально замкнутым**, если вместе с функциями из этого класса он содержит и все их суперпозиции.

Определение 5: Булева функция называется **линейной**, если она может быть представлена полиномом первой степени, т.е. записана в виде

$f(x_1,\ldots,x_n)=a_0\oplus a_1x_1\oplus a_2x_2\oplus\ldots\oplus a_nx_n$, где $a_0, a_1,\ldots a_n$ - коэффициенты 0 или 1.

Например, отрицание и сумма (по mod 2) линейны, а конъюнкция и дизъюнкция нелинейны.

Количество линейных функций 2^{n+1}.

Определение 6: Функция, удовлетворяющая условию $f(0,\ldots,0)=0$, называется **функцией сохраняющей 0** или константой нуля. Например, сохраняют константу 0 дизъюнкция и конъюнкция, а отрицание и импликация не сохраняют ее.

Определение 7: Функция, удовлетворяющая условию $f(1,\ldots,1)=1$, называется функцией сохраняющей 1. Например, сохраняют константу 1 дизъюнкция и конъюнкция, а отрицание и сумма (по mod 2) не сохраняют ее.

Определение 8:

Пусть $f(x_1,\ldots, x_n)$ - булева функция. Функция $f^*(x_1,\ldots, x_n)$ называется **двойственной** $f(x_1,\ldots, x_n)$, если $f^*(x_1,\ldots, x_n)= \overline{f}(\overline{x}_1,\ldots, \overline{x}_n)$. Например, двойственной $x_1\vee x_2$ является функция $x_1\& x_2$ и наоборот.

Определение 9: Функция $f(x_1,\ldots, x_n)$ называется **самодвойственной**, если $f(x_1,\ldots, x_n)=\overline{f}(\overline{x}_1,\ldots, \overline{x}_n)$, т.е. самодвойственная функция f на противоположных наборах принимает противоположные значения. Примерами самодвойственной функции является отрицание (все остальные функции не самодвойственны).

Определение 10: Булева функция называется **монотонной**, если при любом возрастании набора значения этой функции не убывают.

Монотонны, например, дизъюнкция, конъюнкция, тогда как отрицание и сумма (по mod 2) немонотонны.

Теорема Поста: Система функционально **полна** тогда и только тогда, когда содержит:

1) хотя бы одну функцию, не сохраняющую константу 0;
2) хотя бы одну функцию, не сохраняющую константу 1;
3) хотя бы одну нелинейную функцию;
4) хотя бы одну немонотонную функцию;
5) хотя бы одну несамодвойственную функцию.

Если каждая из взятых функций не обладает лишь одним свойством (но каждая другим), то для функциональной полноты необходима система из 5-ти функций.

Полная система называется *несократимой*, если исключение любой функции системы нарушает ее полноту. В связи с тем, что каждая из функций не обладает несколькими свойствами, функционально полные системы могут быть построены с помощью одной, двух, трех и четырех функций. Наиболее распространенная система – система из трех функций: И, ИЛИ, НЕ. С помощью этих функций могут быть описаны процессы управления любыми производствами.

Примеры выполнения заданий

Пример 1: Доказать полноту систем функций:1) $\{\rceil, \&, \vee\}$, 2) $\{\rceil, \vee\}$, 3)$\{\rceil,\&\}$, 4)$\{\rceil,\rightarrow\}$.

Решение:

1) Полнота системы $\{\rceil, \&, \vee\}$ следует из теоремы 2 (лабораторная работа 4).

2) Для доказательства полноты системы $\{\rceil, \vee\}$воспользуемся полнотой системы $\{\rceil, \&, \vee\}$ и утверждением 1, где в роли функций f1,f2,f3 выступают соответственно $\rceil,\&,\vee$, а в роли функций g1,g2 - $\rceil,\vee$. Тогда f1=g1, $f2=x1\&x2=\rceil(\rceil x1\vee\rceil x2)$, т.е. функция f2 выражена через g1 и g2, а f3=g2.

3) Полнота системы $\{\rceil,\&\}$доказывается аналогично предыдущему случаю с использованием равносильности $X_1\vee X_2=\rceil(\rceil X_1\&\rceil X_2)$.

4) Для доказательства полноты системы $\{\rceil,\rightarrow\}$воспользуемся полнотой системы и утверждением 1, где в роли функций f1 и f2 выступают соответственно $\rceil$, $\vee$, а в роли функций g1,g2 - $\rceil$,. Тогда f1=g1, $f2=x1\vee x2=\rceil X_1\rightarrow X_2$.

Пример 2: Исследовать систему функций $\{+,\&,1\}$.

Решение: Это полная система, что следует из утверждения 1, полноты системы $\{\rceil, \&\}$и равносильности $\rceil X=X+1$.По таблицам истинности нетрудно проверить, что выполняются тождества:

1) $X+Y=Y+X$; $X\&Y=Y\&X$;
2) $(X+Y)+Z=X+(Y+Z)$; $(X\&Y)\&Z=X\&(Y\&Z)$;
3) $X+X=0$; $X\&X=X$;
4) $X\&(Y+Z)=X\&Y+X\&Z$;
5) $0+X=X$;
6) $0\&X=0$;
7) $1\&X=X$.

Пример 3: Представить многочленом Жегалкина функции:

1) $X\vee Y$, 2) $X\vee Y\vee Z$:

Решение:

$x\vee y=\rceil(\rceil x\&\rceil y)=(x+1)(y+1)+1=xy+x+y+1+1=xy+x+y$;

$x\vee y\vee z=xyz+xy+xz+yz+x+y+z$.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте принцип суперпозиции.
2. Сколько имеется линейных функций от n переменных?
3. Какие функции называются самодвойственными?
4. Какие функции называются монотонными? Перечислить все монотонные функции от двух переменных.
5. Какое множество называется функционально замкнутым?
6. Какие из указанных ниже систем функций являются функционально замкнутыми классами:
   а) функции от одной переменной;
   б) функции от двух переменных;
   в) все функции алгебры логики;
   г) линейные функции;
   д) самодвойственные функции;
   е) монотонные функции;
   ж) функции, сохраняющие нуль, но не сохраняющие единицу?
7. Сколько имеется самодвойственных функций от n переменных?
8. Дайте определение полной системы.
9. Как определяется многочлен Жегалкина?
10. Сформулируйте теорему Поста.

Индивидуальные задания

1. Выразить с помощью суперпозиции:

1) $\rightarrow$ через 1, $\oplus$, &;

2) &, $\vee$ через $\rightarrow$, $\overline{}$;

3) $\overline{}$ через 0, $\rightarrow$;

4) $\overline{}$, $\vee$, & через | (штрих Шеффера $x \mid y = \overline{x} \& \overline{y}$);

5) $\overline{}$, $\vee$, & через $\downarrow$(стрелка Пирса $x \downarrow y = \overline{x} \vee \overline{y}$);

6) $\rightarrow$ через $\overline{}$ и ~;

7) $\overline{}$ через $\rightarrow$.

2. Представить многочленом Жегалкина:

1) $X \rightarrow Y$;

2) $X \sim Y$.

3. Доказать, что самодвойственная функция на противоположных наборах значений переменных принимает противоположные значения.

4. Доказать, что число сомодвойственных функций от n переменных равно $2^{2^{m-1}}$

5. Определите, будет ли функция самодвойственной:

1) f(x1,x2,x3)=x1+x2&x3

2) f(x1,x2,x4)=(x1&x3)+x2

3) f(x1,x2,x3)=x3&(x1&x2)

6. Какие функции являются монотонными и почему:

1) f(x1)=x1;

2) f(x1,x2)=x1&x2;

3) f(x1,x2)=x1+x2;

4) f(x1,x2)=x1~x2.

7. Найти все самодвойственные функции от двух переменных.