МНОЖЕСТВА. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

1. Множества и их элементы

Множество — одно из основных понятий современной математики. Это понятие не сводится к другим понятиям и не определяется. Вместо определения приведем несколько примеров множеств:

1) множество действительных чисел;
2) множество точек плоскости;
3) множество букв русского алфавита;
4) множество деревьев в лесу;
5) множество учащихся данного класса.

Когда в математике говорят о множестве, то понимают под этим совокупность предметов (объектов), объединенных в одно целое по некоторому признаку. Один из основоположников современной теории множеств немецкий математик Георг Кантор (1845–1918 гг.) выразил эту мысль следующим образом: «Множество есть многое, мыслимое как единое целое».

Предметы (объекты), составляющие множество, называют его ***элементами***. Множества обозначают заглавными латинскими буквами: $A, B, C, X, \ldots$ их элементы — прописными буквами: $a, b, c, x, \ldots$ или буквами с индексами $a_1, a_2, \ldots$

Предложение «объект a является элементом множества A» записывается $a \in A$ (читается: a принадлежит A), если же a не является элементом множества A, то это записывают так $a \notin A$. Например, A — множество четных чисел. Тогда $2 \in A$, $1028 \in A$, $5 \notin A$, $0{,}8 \notin A$.

В повседневной жизни слово «множество» обычно связывают с большим количеством предметов. В математике можно рассматривать множества, содержащие 3, 2, 1 элемент, а также множество, не содержащее ни одного элемента. Такое множество называют ***пустым*** и обозначают $\emptyset$. Примерами пустых множеств являются множество нечетных чисел, делящихся на 2; множество сооружений на земле высотой более 1000 м и т.д. Если множество содержит конечное число элементов, то его называют ***конечным***, а если в нем бесконечно много элементов, то ***бесконечным***. Так, множество жителей г.Томска конечно, а множество точек на отрезке бесконечно.

2. Способы задания множеств

Чтобы задать множество, необходимо знать, какие объекты принадлежат множеству, а какие нет. Если множество содержит немного элементов, то его можно задать, перечислив все его элементы. Например, множество учеников класса — список в классном журнале, множество стран — список в географическом атласе.

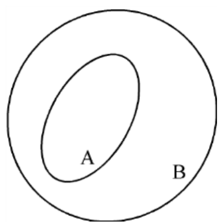
Если множество задано списком, то его элементы записывают в фигурных скобках через точку с запятой. Множество цифр можно записать следующим образом $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 0\}$.

Однако задать множество списком можно только тогда, когда оно содержит конечное число элементов (но и это неудобно, если число элементов множества велико). Существует универсальный способ задания множеств (в том смысле, что таким способом можно задать любое множество). Множество может быть задано с помощью *характеристического свойства*, то есть такого свойства, которым обладают все элементы множества, и не обладают объекты, не принадлежащие множеству (записывают: $A = \{x \mid P(x)\}$, где $P(x)$ — характеристическое свойство).

Приведем несколько примеров:

1. Пусть A — множество остатков от деления натуральных чисел на 5, тогда $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$.
2. Если $B = \{n \mid n \in \mathbf{N}, 3 \le n \le 12\}$ — множество натуральных чисел, заключенных между 3 и 12, то $B = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$.
3. Если $D = \{x \mid x \in \mathbf{R}, -3 \le x \le 4\}$, то D — отрезок $[-3; 4]$.
4. Если $X = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ — множество корней квадратного уравнения, то $X = \{1; 2\}$.

3. Подмножества



Рассмотрим два множества A и B. Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то говорят, что A — ***подмножество*** множества B (рис. 1). Этот факт записывают $A \subset B$. Считают, что пустое множество является подмножеством любого множества. Каждое непустое множество A имеет хотя бы два подмножества — само множество A и пустое множество. Их называют

несобственными подмножествами множества A, все другие подмножества, если они существуют, — ***собственными***.

Если A — подмножество множества B, B — подмножество множества C ($A \subset B$ и $B \subset C$), то A — подмножество множества C ($A \subset C$), то есть свойство быть подмножеством удовлетворяет условию транзитивности.

Примеры множеств и их подмножеств:

1) Пусть $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbf{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbf{Q}$ — множество рациональных чисел, $\mathbf{R}$ — множество действительных чисел. Тогда $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

2) Пусть A — множество букв русского алфавита, B — множество гласных букв русского алфавита, тогда $B \subset A$.

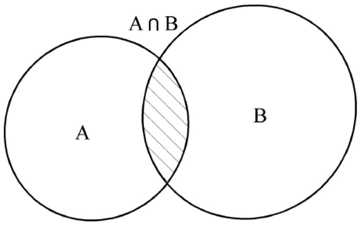
3) Пусть A — множество линий на плоскости, B — множество прямых на плоскости, то $B \subset A$.

Если множество B является подмножеством множества A ($B \subset A$), то принадлежность элемента x множеству B является *достаточным* условием его принадлежности множеству A, а принадлежность элемента x множеству A — необходимым условием его принадлежности множеству B.

4. Пересечение множеств

Пусть даны два множества A и B.

Пересечением (***произведением***) множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих одновременно и множеству A, и множеству B. Обозначают пересечение множеств $A \cap B$. $A \cap B = \{x \mid x \in A$ и $x \in B\}$. Аналогично определяется пересечение любого числа множеств. Графически удобно пересечение множеств изображать в виде общей части двух или более кругов Эйлера–Венна (рис. 2).



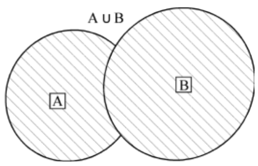
<u>Примеры</u>

1. $A = \{2n \mid n \in \mathbf{N}\}$ — множество чисел, делящихся на 2, $B = \{3n \mid n \in \mathbf{N}\}$ — множество чисел, делящихся на 3, тогда $A \cap B = \{6n \mid n \in \mathbf{N}\}$ — множество чисел, делящихся на 6.

2. A — отрезок $[0; 5]$, B — отрезок $[2; 7]$, тогда $A \cap B$ — отрезок $[2; 5]$.

5. Объединение множеств

Объединением двух множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B. Обозначают объединение множеств $A \cup B$ (рис. 3).



$A \cup B = \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$.

Аналогично определяется объединение любого числа множеств.

<u>Примеры</u>

1. $A = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$, $B = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$, тогда $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18\}$.

2. $A = [0; 7]$, $B = [3; 10]$, тогда $A \cup B = [0; 10]$.

3. $A = \{6k \mid k \in \mathbf{Z}\}$ — числа, кратные 6, $B = \{6k + 2 \mid k \in \mathbf{Z}\}$ — числа, дающие при делении на 6 остаток 2, $C = \{6k + 4 \mid k \in \mathbf{Z}\}$ — числа, дающие при делении на 6 остаток 4. Перечислим некоторые элементы этих множеств:

$A = \{\ldots, -6; 0; 6; 12; \ldots\}$, $B = \{\ldots, -4; 2; 8; 14; \ldots\}$, $C = \{\ldots, -2; 4; 10; 16; \ldots\}$.

Очевидно, что $A \cup B \cup C = \{2k \mid k \in \mathbf{Z}\}$ — множество четных чисел.

6. Разность множеств

Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, множества A, не принадлежащих множеству B. Обозначают разность множеств $A \setminus B$ (рис. 4).

$A \setminus B = \{x \mid x \in A$ и $x \notin B\}$.

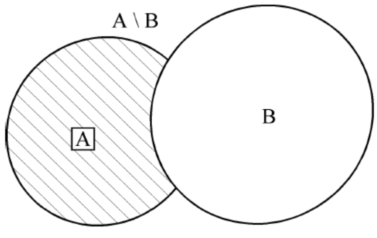


Рис. 4.

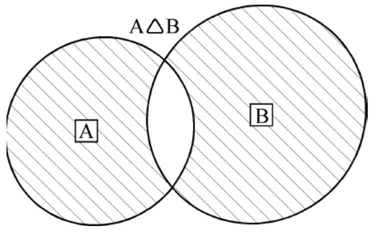


Рис. 5.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих только одному множеству A или B, обозначают $A \Delta B$ (рис. 5).

Часто при решении задач вводят ***универсальное*** множество U — это самое большое множество элементов, рассматриваемых в задаче.

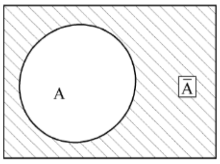


Рис. 6.

Дополнением множества A до универсального называется множество элементов универсального множества, не принадлежащих множеству A. Обозначают дополнение множества A (рис. 6).

$A = U \setminus A = \{x \mid x \in U, x \notin A\}$

Примеры

1. $A = [-2; 0)$, $B = [-1; 3)$. Тогда $A \setminus B = [-2; -1)$, а $B \setminus A = [0; 3)$.

2. $A = \{2m - 1 \mid m \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{4n + 1 \mid n \in \mathbf{Z}\}$.

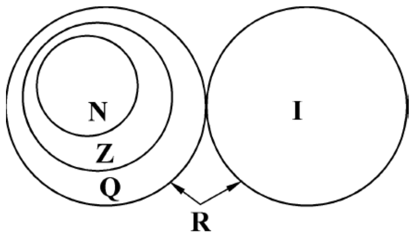
$A = \{\ldots; -3; -1; 1; 3; \ldots\}$, $B = \{\ldots; -3; 1; 5; 9; \ldots\}$,

$A \setminus B = \{\ldots; -1; 3; 7; \ldots\}$,

$A \setminus B = \{4k - 1 \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

7. Числовые множества

Элементами множества могут быть объекты различной природы (числа, слова, геометрические фигуры, функции, животные и т.д.). Для математики особую роль играют множества, составленные из математических объектов. Очень часто встречаются *числовые множества*, т.е. множества, элементами которых являются числа.



Например:

N — множество натуральных чисел,
Z — множество целых чисел,
Q — множество рациональных чисел,
I — множество иррациональных чисел,
R — множество действительных чисел.

Особое место занимают множества, называемые числовыми промежутками: отрезок $[a; b]$, интервалы $(a; b)$, $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$, полуинтервалы $[a; b)$, $(a; b]$, $[a; +\infty)$, $(-\infty; b]$.

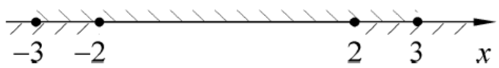
Числовые множества используются при решении уравнений и неравенств.

Примеры

1. Найдем множество допустимых значений переменной для уравнения

$$\sqrt{9 - x^2} + \sqrt{x^2 - 4} = 2.$$

$$\begin{cases} 9 - x^2 \geq 0, \\ x^2 - 4 \geq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} |x| \leq 3, \\ |x| \geq 2, \end{cases}$$



Ответ: $[-3; -2] \cup [2; 3]$.

2. Совпадают ли множества корней уравнений

$(x-2)\sqrt{x^2 - 2x - 3} = 0$ и $(x-2)(x^2 - 2x - 3) = 0$

Рассмотрим первое уравнение $(x-2)\sqrt{x^2 - 2x - 3} = 0$.

Область допустимых значений переменной (ОДЗ):

$(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

Решим уравнение:

$$\left[\begin{array}{l} x - 2 = 0, \\ \sqrt{x^2 - 2x - 3} = 0, \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = 2 \notin \text{ОДЗ}, \\ x = -1, \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Корни: –1; 3.

Корнями же второго уравнения являются числа –1; 2; 3. Поэтому множества корней данных уравнений различны.

8. Алгебра множеств

Алгеброй множеств называется часть теории множеств, в которой изучаются свойства операций над множествами. Рассмотрим некоторые из них:

1. Свойство коммутативности объединения и пересечения

$$A \cup B = B \cup A;\ A \cap B = B \cap A.$$

2. Свойство ассоциативности объединения и пересечения

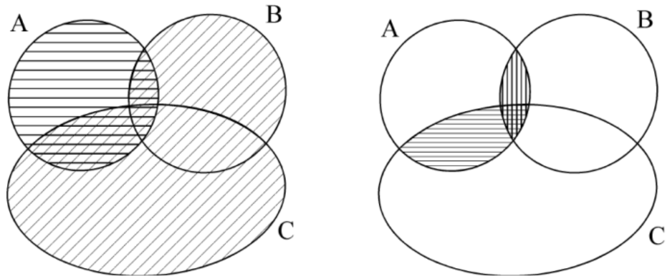
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

3. Свойство дистрибутивности пересечения относительно объединения и наоборот

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

4. $A \cup A = A$; $A \cap A = A$;
5. $A \cup U = U$; $A \cap U = A$;
6. $A \cup \emptyset = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$;
7. $A \cup \overline{A} = U$; $A \cap \overline{A} = \emptyset$;
8. $\overline{\overline{A}} = A$;
9. $\overline{U} = \emptyset$; $\overline{\emptyset} = U$;
10. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. (законы де-Моргана или формулы двойственности).

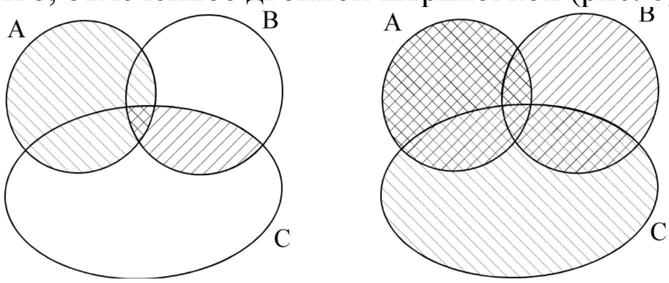
Проиллюстрируем с помощью диаграмм Эйлера–Венна, например, свойство 3. Рассмотрим отдельно левую и правую части равенства (рис. 7, *а* и *б*). На рисунке 7, *а* нас интересует множество, отмеченное двойной штриховкой, а на рисунке 7, *б* — множество, выделенное хотя бы одной штриховкой.



а *б*

Рис. 7.

Левую часть второго равенства определяет множество, отмеченное хотя бы одной штриховкой (рис. 8, *а*). Правую — множество, отмеченное двойной штриховкой (рис. 8, *б*).



а *б*

Рис. 8.

Пример 1. Упростите выражение $\overline{\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}}$.

Решение. Имеем $\overline{\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}} = \overline{\overline{A \cap B \cap C}} = A \cap B \cap C$.

Пример 2. Упростите выражение $((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)) \setminus ((A \cup (B \setminus C)) \cap A)$.

Решение.

1) $(A \cup B \cup C) \cap (A \cup B) = A \cup B$, т.к. $(A \cup B) \subset (A \cup B \cup C)$;
2) $(A \cup (B \setminus C)) \cap A = A$;
3) $(A \cup B) \setminus A = B \setminus A$.

Итак, $((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)) \setminus ((A \cup (B \setminus C)) \cap A) = B \setminus A$.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

С объединением и пересечением множеств мы имеем дело при решении уравнений, неравенств и их систем. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решите неравенство $x^2 - 3x - 10 > 0$.

Решением этого неравенства является объединение двух множеств $(-\infty; -2) \cup (5; \infty)$.

Пример 2. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2x - 10 < 0, \\ x + 4 > 0. \end{cases}$

Решением этой системы является пересечение двух множеств
$(-\infty; 5) \cap (-4; \infty) = (-4; 5)$.

Пример 3. Найдите область определения функции $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{8 - x}$

Ответ: $D(y) = ((-\infty; 1] \cup [3; \infty)) \cap (-\infty; 8] = (-\infty; 1] \cup [3; 8]$.

Пример 4. Решите уравнения а) $(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 4x + 3) = 0$;

б) $(x^2 - 3x + 2)^2 + (x^2 - 4x + 3)^2 = 0$; в) $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x + 2} = 0$

Решение. Корни квадратных трехчленов $x^2 - 3x + 2 = 0$ и $x^2 - 4x + 3 = 0$ образуют соответственно множества $A_1 = \{1; 2\}$ и $A_2 = \{1; 3\}$. Тогда множество решений уравнения

а) это $A_1 \cup A_2 = \{1; 2; 3\}$, уравнения

б) $A_1 \cap A_2 = \{1\}$, уравнения

в) $A_2 \setminus A_1 = \{3\}$.

Пример 5. Решите неравенство $\dfrac{x-9}{x+3} > 0$

Решение. Эта неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств

$\begin{cases} x - 9 > 0, \\ x + 3 > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x - 9 < 0, \\ x + 3 < 0. \end{cases}$

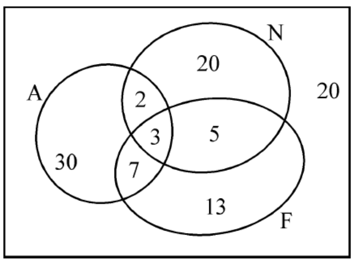
Решения систем находятся как пересечение множеств решения каждого неравенства системы, то есть решение первой системы — множество $(9; \infty) \cap (-3; \infty) = (9; \infty)$, решение второй системы — множество $(-\infty; -3) \cap (-\infty; 9) = (-\infty; -3)$. Решение исходного неравенства — объединение полученных множеств решений $(-\infty; -3) \cup (9; \infty)$.

Решение задач с помощью алгебры множеств

Задача 1. Из 100 школьников английский знают 42, немецкий — 30, французский — 28, английский и немецкий — 5, английский и французский — 10, немецкий и французский — 8, английский, немецкий и французский — 3 школьника. Сколько школьников не знают ни одного языка?

Решение.

Обозначим через A — множество школьников, знающих английский язык; N — множество школьников, знающих немецкий язык; F — множество школьников, знающих французский язык.



Эту же задачу можно решить с помощью диаграммы Эйлера–Венна (рис. 10)

Так как 3 языка знают 3 школьника, то английский и немецкий знают $5 - 3 = 2$, английский и французский — $10 - 3 = 7$, немецкий и французский — 8 – 3 = 5 школьников. Только английский знают 42 – (2 + 3 + 7) = 30, только немецкий — 30 – (2 + 3 + 5) = 20, только французский — 28 – (3 + 5 + 7) = 13 школьников. Ни одного языка не знают 100 – (2 + 3 + 5 + 7 + 13 + 20 + 30) = 20 школьников.

Задача 2. Сколько двузначных чисел не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 11?

Решение. Обозначим: A — множество двузначных чисел, делящихся на 2; B — множество двузначных чисел, делящихся на 3; C — множество двузначных чисел, делящихся на 5; D — множество двузначных чисел, делящихся на 11.

$n(A \cup B \cup C \cup D)$ — количество двузначных чисел, делящихся хотя бы на одно из чисел 2; 3; 5; 11.

$n(A \cup B \cup C \cup D) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(A \cap D) - n(B \cap C) - n(B \cap D) - n(C \cap D) + n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap D) + n(A \cap C \cap D) + n(B \cap C \cap D) - n(A \cap B \cap C \cap D)$.

$n(A) = 45$, $n(B) = 30$, $n(C) = 18$, $n(D) = 9$,

$n(A \cap B) = 15$, $n(A \cap C) = 9$, $n(A \cap D) = 4$, $n(B \cap C) = 6$,

$n(B \cap D) = 3$, $n(C \cap D) = 1$, $n(A \cap B \cap C) = 3$,

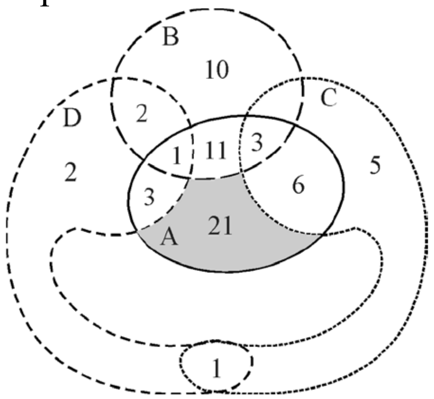
$n(A \cap B \cap D) = 1$, $n(A \cap C \cap D) = n(B \cap C \cap D) = n(A \cap B \cap C \cap D) = 0$.

Итак, $n(A \cup B \cup C \cup D) = 45 + 30 + 18 + 9 - 15 - 9 - 4 - 6 - 3 - 1 + 3 + 1 = 102 - 34 = 68$.

Так как всего 90 двузначных чисел, то чисел, не делящихся ни на одно из заданных чисел: 80 – 68 = 22.

Задача 3. Сколько четных двузначных чисел, не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 11?

Решение. Учитывая обозначения, введенные в предыдущей задаче, нужно ответить на вопрос: сколько элементов попало во множество A и не попало ни в какие другие множества?



Рассмотрим диаграмму. Отметим количественные показатели в соответствующих областях в следующем порядке:

$n(A \cap B \cap C) = 3$, $n(A \cap B \cap D) = 1$,

$n(A \cap B) - 3 - 1 = 11$, $n(A \cap C) - 3 = 6$,

$n(A \cap D) - 1 = 3$,

$n(A) - 3 - 1 - 11 - 3 - 6 = 45 - 24 = 21$.

Таким образом, только во множестве A (т.е. четных чисел, не делящихся ни на 3, ни на 5, ни на 11) находится 21 число. Остальные числовые данные на диаграмме служат иллюстрацией к задаче 2 (90 – (21 + 10 + 5 + 2 + 2 + 3 + 3 + 6 + 11 + 1 + 3 + + 1) = 22).

Задача 4. Учащиеся 9-х классов пошли в лес за грибами. 80 % собирали белые грибы, 70 % — моховики, 85 % — маслята, 75 % — рыжики. Сколько процентов учащихся собирали белые грибы, моховики, маслята и рыжики?

Решение. Подсчитаем, сколько учащихся собирали белые грибы и моховики: 70 % + 80 % = 150 %. Следовательно, белые грибы и моховики собирали 50 % учащихся. Аналогично, так как 50 % + 85 % = 135 %, то белые грибы, моховики и маслята соби-рали 35 % учащихся. Далее, имеем 35 % + 75 % = 110 %, белые грибы, моховики, маслята и рыжики собирали 10 % учащихся.

Упражнения

1. В спортивном классе обучаются 24 человека. Каждый учащийся занимается хотя бы одним видом спорта (баскетболом или волейболом), из них баскетболом и волейболом

занимаются 12 человек. Сколько человек занимается только волейболом, если их в 3 раза больше, чем тех, кто занимается только баскетболом?

2. В одном украинском городе все жители говорят на русском или украинском языке. По-украински говорят 80 % всех жителей, а по-русски — 75 %. Сколько процентов всех жителей говорят на обоих языках?

3. Группа ребят отправилась в поход. Семеро из них взяли с собой бутерброды, шестеро — фрукты, пятеро — печенье. Четверо ребят взяли с собой бутерброды и фрукты, трое — бутерброды и печенье, двое — фрукты и печенье, а один — и бутерброды, и фрукты, и печенье. Сколько ребят пошли в поход?

4. Староста класса, в котором 40 человек, подводил итоги по успеваемости группы за I полугодие. Получилась следующая картина: из 40 учащихся не имеют троек по русскому языку 25 человек, по математике — 28 человек, по русскому языку и математике — 16 человек, по физике — 31 человек, по физике и математике — 22 человека, по физике и русскому языку 16 человек. Кроме того, 12 человек учатся без троек по всем трем предметам. Классный руководитель, просмотрев результаты, сказал: «В твоих расчетах есть ошибка». Составьте диаграмму Эйлера–Венна и объясните, почему это так.

5. В лаборатории института работают несколько человек. Каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. 7 человек знают английский, 7 — немецкий, 8 — французский, 5 знают английский и немецкий, 4 — немецкий и французский, 3 — французский и английский, 2 человека знают все три языка. Сколько человек работает в лаборатории? Сколько из них знает только французский язык? Сколько человек знает ровно 1 язык?

6. Сколько целых чисел от 0 до 999 не делятся ни на 5, ни на 7, ни на 11?

Ответы: **1**. 9. **2**. 55 %. **3**. 10. **4**. Если на диаграмме Эйлера–Венна отметить данные в непересекающихся множествах класса, то общее число учащихся класса получится равным 42, а не 40, как сказано в условии. **5**. 12; 3; 4. **6**. 376.

ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ. КОРТЕЖИ

Пусть даны два конечных множества X и Y. Рассмотрим множество всевозможных упорядоченных пар (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$. Множество таких пар называется ***декартовым произведением*** множеств X и Y и обозначается $X \times Y$.

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Заметим, что в определении декартова произведения речь идет об упорядоченных парах, то есть $(x, y) \neq (y, x)$ при $x \neq y$.

Заметим, что если одно из множеств X или Y пусто, то $X \times Y = \emptyset$.