Логика предикатов

Логика высказываний применяется к простым высказываниям, где базисные высказывания — либо истинны, либо ложны. Утверждения, содержащие одну и более переменных, могут быть верными при некоторых значениях переменных и ложными при других.

Предикат – это утверждение, содержащее переменные величины, принимающее значение истины или лжи в зависимости от значений переменных.

Например, выражение «x – целое число, удовлетворяющее соотношению $x = x^2$» является предикатом, поскольку оно истинно при x = 0 или x = 1 и ложно в любом другом случае.

На предикаты переносятся все операции (логические связки), которые мы проделывали с высказываниями. Истинность составного предиката зависит от значений входящих в него переменных.

Пример: $P = \{1055 > 1999\}$

$P(x) = \{x > 1999\}$ - высказывание, содержащее переменную.

$x \in N$ - предметная область предиката.

$x_1, x_2 \in N \quad P(x_1) = 1 \quad P(x_2) = 0 \quad P : N \to E = \{0,1\}$

Понятие квантора

Существуют логические операторы – ***кванторы***, применение которых к предикатам превращает их в ложные или истинные высказывания.

Утверждениями о том, что некоторое свойство имеет место «***для всех»*** рассматриваемых объектов, называют квантором ***«общности»*** и обозначают – **∀.**

Утверждениями о том, что «***найдется (существует)»*** по крайней мере один объект, обладающий данным свойством, называют квантором ***«существования»*** и обозначают – **∃.**

Включая в предикат кванторы, мы превращаем его в высказывание. Поэтому предикат с кванторами может быть истинным или ложным.

Высказывание ∀x P(x) означает, что область истинности предиката P(x) совпадает с областью значений переменной x. («При всех значениях (x) утверждение верно»).

Высказывание ∃x P(x) означает, что область истинности предиката P(x) непуста («Существует (x) при котором утверждение верно»).

Примеры:

1) $\sum_{s=1}^{n} a_k = \sum_{s=1}^{n} a_s$, k – связанная переменная, n – свободная переменная

2) $\int_0^t f(x)dx = \int_0^t f(s)ds$, t – свободная, x – связанная.

3) $\int_a^b F(x,y)dx$, a,b,y – свободные переменные, x – связанная.

Методические указания

В основе компьютерной образованности лежит логическая грамотность. Фундаментом логическая грамотность есть умение производить равносильные преобразования формул, а для этого необходимо твёрдо усвоить язык логики высказываний.

Любой язык программирования обязательно содержит логические связки-операторы, т.е. содержит в себе логику высказываний. Компьютеры любого назначения и сложности содержат логические блоки: дизъюнктивный, конъюнктивный и др., конструирование, синтез, функционирование которых основаны на законах логики высказываний.

Пример 1: Пусть P(x) — предикат: «x — вещественное число и $x^2+1 = 0$». Выразите словами высказывание: $\exists$ x : P(x) и определите его истинностное значение.

Решение. Данное высказывание можно прочитать так: существует вещественное число x, удовлетворяющее уравнению $x^2+1=0$. Поскольку квадрат любого вещественного числа неотрицателен, т. е. $x^2 \geq 0$, мы получаем, что $x^2 + 1 \geq 1$. Следовательно, утверждение $\exists$ x : P(x) ложно.

Отрицание высказывания из этого примера записывается в виде: не $\exists$ x : P(x). Это, естественно, истинное высказывание, которое означает, что не существует вещественного числа x, удовлетворяющего условию $x^2 + 1 = 0$. Иными словами, каково бы ни было вещественное x,

$x^2 + 1 \neq 0$. В символьной форме это можно записать как $\forall$x **не** P(x).

Для общего предиката P(x) есть следующие логические эквивалентности:

не $\exists$x : P(x) $\Leftrightarrow$ $\forall$ x не P(x);

не $\forall$ x P(x) $\Leftrightarrow$ $\exists$ x : P(x).

Некоторые трудности возникают, когда в высказывании участвует более одного квантора.

Пример 2: Предположим, что x и y — вещественные числа, а P(x,y) обозначает предикат $x + y = 0$. Выразите каждое из высказываний словами и определите их истинность.

1)) $\forall x \exists y$: P(x,y);

2) $\exists y$: $\forall x$ P(x,y).

Решение.

1) Высказывание $\forall x \exists y$: P(x, y) говорит о том, что для любого вещественного числа x найдется такое вещественное число y, что $x+y=0$. Оно, очевидно, верно, поскольку какое бы число x мы ни взяли, число $y = -x$ обращает равенство $x + y = 0$ в верное тождество.

2) Высказывание $\exists y$: $\forall x$ P(x, y) читается следующим образом: существует такое вещественное число y, что для любого вещественного числа x выполнено равенство $x + y = 0$. Это, конечно, не так: не существует вещественного числа y, обладающего указанным свойством. Следовательно, высказывание ложно.

Индивидуальные задания

1. Из следующих предикатов с помощью кванторов постройте всевозможные высказывания и определите, какие из них истинны, а какие ложны ($x \in R$):

1) $x^2 + 2x+1=(x+1)^2$;
2) $(x - 3)(x + 3) < x^2$;
3) $e^{|x|} < \ln|x| (x \neq 0)$;
4) $(x^2+l=0) \to ((x=l) \vee (x=2))$;
5) $(x<0) \vee (x = 0) \vee (x>0)$;
6) $|x-y| \geq ||x|-|y||$;
7) $\sin x = \sin y$;
8) $x^2 = y^2 \to x = y$;
9) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$;
10) $|x-y| \leq 3$;
11) $x^2 = 25$;
12) $x^2 + y^2 = 16$.

2. Найдите множества истинности следующих предикатов, заданных над указанными множествами:

1) «x кратно 3», M= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9};
2) «x кратно 3», M = (3, 6, 9, 12};
3) «x кратно 3», M= {2, 4, 8};
4) «$x^2 + 4 > 0$», M= R;
5) «$\sin x > 1$», M= R;
6) «$x^2 + x-6 = 0$», M= R;
7) «$x^2_1 + x^2_2 = 0$», $M_1=M_2=R$;
8) «$x_1 < x2$», M_1 = {1, 2, 3, 4, 5}, M_2 = {3, 5, 7};
9) «x_1, делит x_2», $M_1 = M_2$ = {2, 3, 4, 6};
10) «$|x_1| + x2 > 12$», M_1 = {-2, 4, 8}, M_2 = {0, 7, 9, 11};
11) «$x_1 + x_2 < O$», M_1 = {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}, M_2 = {-3, 1, 2};
12) «$\cos x > 1$», M= R.