

Построение математических моделей

Цель работы – изучить принцип построения математических моделей; закрепить полученные знания оптимизации данного процесса.

Теоретическая часть

Задачам *линейного программирования* характерно:

- 1) показатель эффективности высокий и является элементов решения;
- 2) ограничения накладываются на возможные решения;
- 3) они имеют вид линейных уравнений или систем.

Целевая функция – величина, с помощью которой производится выбор оптимального решения и которая определяется проектными параметрами.

Практическая часть

Пример. Построить математическую модель по условиям задачи.

Фабрика производит два вида красок: первый – для наружных, а второй для внутренних работ. Для производства красок используется два ингредиента А и В. Максимально возможные суточные запасы этих ингредиентов составляют 6 и 8 т соответственно. Известны расходы А и В на 1 т соответствующих красок (Таблица 1). Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску второго вида никогда не превышает спроса на краску первого вида более чем на 1 т. Кроме того, установлено, что спрос на краску второго вида никогда не превышает 2 т в сутки. Оптовые цены одной тонны красок равны: 3 тыс. руб. для краски первого вида, 2 тыс. руб. для краски второго вида.

Необходимо построить математическую модель, позволяющую установить, какое количество краски каждого вида надо производить, чтобы доход от реализации продукции был максимальным.

Таблица. Параметры задачи о производстве красок

Ингредиенты	Расход ингредиентов, т ингр./т краски		Запас, т ингр./сут.
	Краска 1-го вида	Краска 2-го вида	
А	1	2	6
В	2	1	8

Решение

Переменные задачи

В задаче требуется установить, сколько краски каждого вида надо производить. Поэтому искомыми величинами, а значит, и переменными задачи являются суточные объёмы производства каждого вида красок:

x_1 – суточный объём производства краски первого вида, [т краски/сутки]

x_2 – суточный объём производства краски второго вида, [т краски/сутки]

Целевая функция

В условии задачи сформулирована цель – добиться максимального дохода от реализации продукции. Т.е. критерием эффективности служит параметр суточного дохода, который должен стремиться к максимуму. Чтобы рассчитать величину суточного дохода от продажи красок обоих видов, необходимо знать объёмы производства красок, т.е. x_1 и x_2 тонн краски в сутки, а также оптовые цены на краски первого и второго видов – согласно условию, соответственно 3 и 2 тыс. руб. за 1 т краски. Таким образом, доход от продажи суточного объёма производства краски первого вида равен $3x_1$ тыс. руб. в сутки, а от продажи краски второго вида – $2x_2$ тыс. руб. в сутки. Поэтому запишем целевую

функцию в виде суммы дохода от продажи красок первого и второго видов (при допущении независимости объемов сбыта каждой из красок)

$$L(X) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

Ограничения

Возможные объемы производства красок x_1 и x_2 ограничиваются следующими условиями:

- количество ингредиентов А и В, израсходованное в течение суток на производство красок обоих видов, не может превышать суточного запаса этих ингредиентов на складе;

- согласно результатам изучения рыночного спроса суточный объем производства краски второго вида может превышать объем производства краски первого вида, но не более чем на 1 т краски;

- объем производства краски второго вида не должен превышать 2 т в сутки, что также следует из результатов изучения рынков сбыта;

- объемы производства красок не могут быть отрицательными.

Таким образом, все ограничения задачи делятся на три группы, обусловленные:

1) расходом ингредиентов;

2) рыночным спросом на краску;

3) неотрицательностью объемов производства.

Запишем ограничения в математической форме.

Левая часть ограничения – это формула расчета суточного расхода конкретного ингредиента на производство красок. Так из условия известен расход ингредиента А на производство 1 т краски 1-го вида (1 т ингр. А) и 1 т краски 2-го вида (2 т ингр. А) (см. табл.). Тогда на производство x_1 т краски 1-го вида и x_2 т краски 2-го вида потребуется $1x_1 + 2x_2$ т ингр. А.

Правая часть ограничения – это величина суточного запаса ингредиента на складе, например, 6 т ингредиента А в сутки (см. табл.). Таким образом, ограничение по расходу А имеет вид

$$1x_1 + 2x_2 \leq 6$$

Аналогична математическая запись ограничения по расходу В

$$2x_1 + 1x_2 \leq 8$$

Ограничение по суточному объему производства краски 1-го вида по сравнению с объемом производства краски 2-го вида имеет *содержательную* форму

$$\left(\begin{array}{l} \text{Превышение объема производства краски 2-го вида} \\ \text{над объемом производства краски 1-го вида} \end{array} \right) \leq \left(1 \frac{\text{т краски}}{\text{сутки}} \right)$$

и математическую форму

$$x_2 - x_1 \leq 1$$

Ограничение по суточному объему производства краски 1-го вида имеет *содержательную* форму:

$$\left(\text{Спрос на краску 1-го вида} \right) \leq \left(2 \frac{\text{т краски}}{\text{сутки}} \right)$$

и математическую форму

$$x_1 \leq 2$$

Неотрицательность объемов производства задается как

$$x_1 > 0$$

$$x_2 > 0$$

Таким образом, *математическая модель* этой задачи имеет вид

$$L(X) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \text{ [руб./сутки]}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \text{ [т ингр. А/с/сут]}, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \text{ [т ингр. В/с/сут]}, \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \text{ [т краски/сутки]}, \\ x_2 \leq 2 \text{ [т краски/сутки]}, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ [т краски/сутки]}. \end{cases}$$

Задание. Построить математическую модель по условиям задачи.

1. Из трех продуктов I, II, III составляется смесь. В состав смеси должно входить не менее 6 ед. химического вещества А, 8 ед. – вещества В и не менее 12 ед. вещества С. Структура химических веществ приведена в таблице. Составьте наиболее дешевую смесь.

Продукт	Содержание химического вещества в 1 ед. продукции			Стоимость 1 ед. продукции
	А	В	С	
I	2	1	3	2
II	1	2	4	3
III	3	1,5	2	2,5

2. Хозяйство располагает следующими ресурсами: площадь – 100 ед., труд – 120 ед., тяга – 80 ед. Хозяйство производит четыре вида продукции П1, П2, П3, П4. Организация производства характеризуется таблицей. Составьте план выпуска продукции, обеспечивающий хозяйству максимальную прибыль.

Продукция	Затраты на 1 ед. продукции			Доход от единицы продукции
	площадь	труд	тяга	
П1	2	2	2	3
П2	3	1	3	1
П3	4	2	1	32
П4	5	4	1	26

3. Цех выпускает трансформаторы двух видов. Для изготовления трансформаторов обоих видов используются железо и проволока. Общий запас железа – 3 т, проволоки – 18 т. На один трансформатор первого вида расходуются 5 кг железа и 3 кг проволоки, а на один трансформатор второго вида расходуются 3 кг железа и 2 кг проволоки. За каждый реализованный трансформатор первого вида завод получает прибыль 3 д.е., второго – 4 д.е. Составьте план выпуска трансформаторов, обеспечивающий заводу максимальную прибыль.

4. Предприятие должно выпускать два вида продукции – А и В, используя при этом последовательно четыре станка. Данные о технологическом процессе указаны в таблице. Составьте план выпуска продукции, обеспечивающий предприятию наибольшую прибыль.

Станок	Трудоёмкость на 1 ед. продукции		Фонд времени, час.
	А	В	
1	2	3	15
2	2	6	18
3	4	0	16
4	1	2	8
Прибыль на 1 ед. продукции (д.е.)	2	3	

5. Предприятие изготавливает три вида повидла, содержащего смесь слив, яблок и груш. Содержание в килограмме повидла каждого вида различных ингредиентов приведено в таблице. Для полноценного суточного производства необходимо 100 кг яблок, 120 кг груш и 90 кг слив. Составить оптимальный план суточного производства для

получения максимальной прибыли, если известно, что подло первого вида реализуется по 3 у.е., второго – по 5 у.е, третье по 1.5 у.е.

Повидло	Ингредиенты		
	Сливы	Яблони	Груши
1	10	5	12
2	23	28	33
3	43	40	39

6. Для сохранения нормальной жизнедеятельности человек должен в сутки потреблять белков не менее 120 условных единиц (усл. ед.), жиров – не менее 70 и витаминов – не менее 10 усл. ед. Содержание их в каждой единице продуктов П1 и П2 равно соответственно (0,2; 0,075; 0) и (0,1; 0,1; 0,1) усл. ед. Стоимость 1 ед. продукта П1 – 2 руб., П2 – 3 руб. Постройте математическую модель задачи, позволяющую так организовать питание, чтобы его стоимость была минимальной, а организм получил необходимое количество питательных веществ.

7. На предприятии для производства запасных частей для автомобилей используются три вида ресурсов. Выпускаются три вида запасных частей. Организация производства на предприятии характеризуется таблицей. Составьте план производства запасных частей, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль.

Ресурсы	Расход материалов на производство одной запасной части, кг.			Запас ресурсов, кг
	1	2	3	
I	5	5	1200	
II	4	–	3	300
III	–	2	4	800
Прибыль	5	8	6	

8. Совхоз отвел три земельных массива размером 5000, 8000, 9000 га на посевы ржи, пшеницы, кукурузы. Средняя урожайность в центнерах на 1 га по массивам указана в таблице. За 1 ц ржи совхоз получает 2 д. е., за 1 ц пшеницы – 2,8 д. е., за 1 ц кукурузы – 1,4 д. е. Сколько гектаров и на каких массивах совхоз должен отвести на каждую культуру, чтобы получить максимальную выручку, если по плану он обязан сдать не менее 1900 т ржи, 158 000 т пшеницы и 30 000 т кукурузы?

Посевы	Массивы		
	1	2	3
Рожь	12	14	15
Пшеница	14	14	22
Кукуруза	30	35	25

9. Нефтеперерабатывающий завод получает четыре полуфабриката: 400 тыс. л. алкилата, 250 тыс. л. крекинг-бензина, 350 тыс. л. бензина прямой перегонки и 100 тыс. л. изопентона. В результате смешивания этих четырех компонентов в разных пропорциях образуется три сорта авиационного бензина: бензин А – 2:3:5:2, бензин В – 3:1:2:1, бензин С – 2:2:1:3. Стоимость 1 тыс. л. указанных сортов бензина характеризуется числами 120 д. е., 100 д. е., 150 д. е. Составьте план выпуска разных сортов авиационного бензина из условия получения максимальной стоимости всей продукции.

10. При откормке животных каждое животное ежедневно должно получить не менее 60 единиц питательного вещества А, 50 единиц питательного вещества В и 12 единиц питательного вещества С. Эти вещества содержат три вида корма. Составить дневной рацион, обеспечивающий получение необходимого количества питательных веществ при минимальных денежных затратах. Цена одного килограмма корма первого вида – 9 р., второго – 12 р., третьего – 10 р.

Питательные вещества	Количество единиц питательного вещества		
	I	II	III
A	1	3	4
B	2	4	2
C	1	4	3

11. Из двух сортов бензина образуются две смеси – А и В. Смесь А содержит бензина 60% 1-го сорта и 40% 2-го сорта; смесь В – 80% 1-го сорта и 20% 2-го сорта. Цена 1 кг смеси А – 10 д. е., а смеси В – 12 д. е. Составьте план образования смесей, при котором будет получен максимальный доход, если в наличии имеется бензина 50 т 1-го сорта и 30 т 2-го сорта.

12. Для выпуска четырех видов продукции требуются затраты сырья, рабочего времени и оборудования. Исходные данные приведены в таблице. Необходимо определить, сколько каждого вида продукции следует выпустить, чтобы общая стоимость выпускаемой продукции была максимальной.

Ресурсы	Затраты ресурсов на единицу продукции				Запасы ресурсов, ед.
	I	II	III	IV	
Сырье	6	5	3	2	80
Рабочее время	15	12	8	10	100
Оборудование	5	3	2	4	70
Прибыль за единицу	30	10	20	15	

13. Фирма выпускает два набора удобрений для газонов: обычный и улучшенный. В обычный набор входят 300 г азотных, 400 г фосфорных и 100 г калийных удобрений, а в улучшенный – 200 г азотных, 600 г фосфорных и 200 г калийных удобрений. Известно, что для некоторого газона требуется не менее 10 кг азотных, 20 кг фосфорных и 7 кг калийных удобрений. Обычный набор стоит 30 руб., а улучшенный – 40 руб. Сколько и каких наборов удобрений надо купить, чтобы обеспечить эффективное питание почвы и минимизировать стоимость?

14. Телевизионный завод выпускает 2 вида телевизоров, причем суточное плановое задание составляет не менее 100 телевизоров серии ТВ-1 и 80 телевизоров серии ТВ-2. Суточные ресурсы фабрики следующие: 800 ед. производственного оборудования, 600 ед. сырья и 480 ед. электроэнергии, расход которых на производство одного телевизора каждого типа представлены в таблице. Себестоимость каждой серии телевизора соответственно равна: ТВ-1 – 6400 руб., ТВ-2 – 8200 руб. Необходимо определить, сколько телевизоров каждого вида следует выпустить, чтобы общая стоимость выпускаемой продукции была максимальной.

Ресурсы	Телевизоры	
	ТВ-1	ТВ-2
Оборудование	2	4
Сырьё	3	2
Электроэнергия	4	1

15. Для приобретения оборудования, размещаемого на производственной площади 32 м^2 , фирма выделяет 24 тыс. руб. Имеются единицы оборудования двух типов: оборудование типа А стоимостью 3 тыс. руб., требующее производственную площадь 8 м^2 и имеющее производительность 4 тыс. единиц продукции за смену, и типа В стоимостью 6 тыс. руб., занимающее производственную площадь 5 м^2 и имеющее производительность 5 тыс. единиц продукции за смену. Требуется рассчитать оптимальный вариант приобретения оборудования, обеспечивающий максимум производительности участка.

Содержание отчёта:

1. Номер, тема и цель практической работы.
2. Текст задания.
3. Процесс построения математической модели с пояснениями.

Практическая работа №2

Построение математических моделей

Цель работы – изучить принцип построения математических моделей; закрепить полученные знания оптимизации данного процесса.

Задание. Построить математическую модель по условиям задачи.

Вариант :8(Совхоз отвел три земельных массива размером 5000, 8000, 9000 га на посевы ржи, пшеницы, кукурузы. Средняя урожайность в центнерах на 1 га по массивам указана в таблице. За 1 ц ржи совхоз получает 2 д. е., за 1 ц пшеницы – 2,8 д. е., за 1 ц кукурузы – 1,4 д. е. Сколько гектаров и на каких массивах совхоз должен отвести на каждую культуру, чтобы получить максимальную выручку, если по плану он обязан сдать не менее 1900 т ржи, 158 000 т пшеницы и 30 000 т кукурузы?)

Посевы	Массивы		
	1	2	3
Рожь	12	14	15
Пшеница	14	14	22
Кукуруза	30	35	25

Решение:

Математическая модель задачи оптимизации включает:

1) целевую функцию, которая показывает, в каком смысле решение должно быть оптимальным. Вид назначения, в нашем случае - максимизировать выручку.

$$2 \cdot (12X_{11} + 14X_{21} + 15X_{31}) + 2,8 \cdot (14X_{12} + 14X_{22} + 22 X_{32}) + 1,4 \cdot (30X_{13} + 35X_{23} + 25X_{33}) \max$$

2) ограничения, которые устанавливают зависимость между параметрами объекта исследования.

$$12X_{11} + 14X_{12} + 30X_{13} = 5000 \text{ – урожайность ржи, пшеницы и кукурузы на I массиве.}$$

$$14X_{21} + 14X_{22} + 35 X_{23} = 8000 \text{ - урожайность ржи, пшеницы и кукурузы на II массиве.}$$

$$15X_{31} + 22X_{32} + 25X_{33} = 9000 \text{ - урожайность ржи, пшеницы и кукурузы на III массиве.}$$

3) граничные условия, которые показывают предельно-допустимые значения параметров объекта исследования.

$$12X_{11} + 14X_{21} + 15X_{31} \geq 19000 \text{ - по плану количество тонн ржи с трех массивов.}$$

$$14X_{12} + 14X_{22} + 22 X_{32} \geq 1580000 \text{ - по плану количество тонн пшеницы с трех массивов.}$$

Переменные задачи

В задаче требуется установить, сколько гектаров и на каких массивах совхоз должен отвести на каждую культуру

Целевая функция

В условии задачи сформулирована цель – добиться максимального дохода от реализации продукции.

Ограничения

1900 т ржи

158 000 т пшеницы

30 000 т кукурузы

Таким образом, *математическая модель* этой задачи имеет вид

$30X_{13}+35X_{23}+25X_{33} \geq 300000$ - по плану количество тонн кукурузы с трех массивов.

$X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{21}, X_{22}, X_{23}, X_{31}, X_{32}, X_{33} \geq 0$ – обязательное условие, на каждом массиве должны быть посеяны все виды данных культур.

X_{11} – количество центнеров ржи на I массиве.

X_{12} – количество центнеров пшеницы на I массиве.

X_{13} – количество центнеров кукурузы на I массиве.

X_{21} – количество центнеров ржи на II массиве.

X_{22} – количество центнеров пшеницы на II массиве.

X_{23} – количество центнеров кукурузы на II массиве.

X_{31} – количество центнеров ржи на III массиве.

X_{32} – количество центнеров пшеницы на III массиве.

X_{33} – количество центнеров кукурузы на III массиве.

$2 \cdot (12X_{11}+14X_{21}+15X_{31})+2,8 \cdot (14X_{12}+14X_{22}+22 X_{32})+1,4 \cdot (30X_{13}+35X_{23}+25X_{33}) \max$

$12X_{11}+14X_{12}+30X_{13} = 5000$

$14X_{21}+14X_{22}+35 X_{23} = 8000$

$15X_{31}+22X_{32}+25X_{33} = 9000$

$12X_{11}+14X_{21}+15X_{31} \geq 19000$

$14X_{12}+14X_{22}+22 X_{32} \geq 1580000$

$30X_{13}+35X_{23}+25X_{33} \geq 300000$

$X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{21}, X_{22}, X_{23}, X_{31}, X_{32}, X_{33} \geq 0$

Вывод: Сформулировали математическую модель задачи оптимизации.