Практическая работа №5

Оптимизация целевой функции симплексным методом

Цель работы – изучить принцип оптимизации целевой функции симплексным методом; закрепить полученные знания оптимизации данного процесса.

Теоретическая часть

Рассмотрим основные особенности построения симплексных таблиц (оптимизации целевой функции симплексным методом).

Таблица. Общий вид симплексной таблицы.

$C_Б$	Б	b	c_1	c_2	…	c_r	…	c_m	c_{m+1}	…	c_k	…	c_n	Θ
			x_1	x_2	…	x_r	…	x_m	x_{m+1}	…	x_k	…	x_n	
c_1	x_1	b_1	1	0	…	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1k}	…	a_{1n}	b_1/a_{1k}
c_2	x_2	b_2	0	1	…	0	…	0	a_{2m+1}	…	a_{2k}	…	a_{2n}	b_2/a_{2k}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
c_r	x_r	b_r	0	0	…	1	…	0	a_{rm+1}	…	a_{rk}	…	a_{rn} ←	b_r/a_{rk}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
c_m	x_m	b_m	0	0	…	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mk} ↑	…	a_{mn}	b_m/a_{mk}
	f	f_0	0	0	…	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_k	…	Δ_n	

Б – столбец базисных переменных;

b – столбец свободных членов системы органический;

x_j – столбцы коэффициентов при неизвестных в системе ограничений;

$C_Б$ – коэффициенты из целевой функции при базисных переменных;

f_0 – значение целевой функции: $f_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot b_i$

Δ_j для базисных переменных равно нулю, для свободных – $\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot a_{ik} - c_k$.

Стрелками обозначены разрешающие строка и столбец. a_{rk} – разрешающий элемент.

Основной оптимизации симплексных таблиц – метод Жордана – Гаусса, который представляет собой переход от одного опорного плана к другому. Нахождение оптимального плана симплексным методом включает следующие этапы:

1. Нахождение опорного плана;
2. Составление симплекс – таблиц;
3. Выяснение того, что имеется хотя бы одно отрицательное число Δ_j, если нет, то опорный план оптимальный, если да, то либо устанавливается неразрешимость задачи, либо переход к новому опорному плану.

Переход от одного опорного плана к другому происходит по алгоритму:

1. Элементы разрешающей строки делятся на разрешающие элемент.
2. Элементы разрешающего столбца обнуляются.
3. Остальные элементы новой таблицы вычисляются по правилу прямоугольника:

$$a_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot a_{rk} - a_{rj} \cdot a_{ik}}{a_{rk}}$$

Диагональ, где находится разрешающий элемент называется главной диагональю, другая называется побочной. Из произведения элементов главной диагонали вычитается произведение элементов побочной диагонали и эту разность делят на разрешающий элемент.

4. Нахождение разрешающих столбца и строки и разрешающего элемента.

5. По правилу прямоугольника находятся остальные элементы новой таблицы.

6. Проверка найденного опорного плана на оптимальность, если план не оптимален, то возврат к пункту 4. В случае получения оптимального решения заканчивают.

Пример. Решить задачу из примера 2 симплексным способом.

$$L(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ -x_1 + x_2 \le 1,) \\ \qquad x_2 \le 2, \\ x_1 \quad 0, x_2 \quad 0. \end{cases}$$

Решение

Превращаем все неравенства в равенства:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 8, \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 1, \\ \qquad x_2 + x_6 = 2. \end{cases}$$

Свободные переменные – x_1 , x_2 ; базисные – x_3 , x_4 , x_5 , x_6 . Составляем симплексную таблицу.

Таблица. Первый этап создания симплексной таблицы.

Сб	Б	b	3	2	0	0	0	0	Θ
			x1	x2	x3	x4	x5	x6	
0	x3	6	1	2	1	0	0	0	6
0	x4	8	2	1	0	1	0	0	4
0	x5	1	-1	1	0	0	1	0	-
0	x6	2	0	1	0	0	0	1	-
	f	0	-3	-2	0	0	0	0	

Разрешающий элемент

Деление чисел столбца b и разрешающего столбца

Элемента столбца x_1 умножаются на элементы столбца $C_Б$ соответственно и вычитается коэффициент при x_1 в целевой функции

Разрешающий столбец, поскольку в строке f -3 является наименьшим отрицательным числом.

Находятся всегда аналогично x_1

Разрешающая строка

В этом столбце нет отрицательных чисел и чисел стремящихся к бесконечности, т.е. деление на нуль.

Полученный опорный план не оптимален. В новом опорном плане переменная x_1 становится базисной, а переменная x_4 – свободной. Разрешающий элемент делим сам на себя, остальные элементы разрешающего столбца обнуляем. Элемент разрешающей строки делим на разрешающий элемент. Для базисных переменных все значения остаются прежними.

Таблица. Второй шаг заполнения симплексной таблицы

Сб	Б	b	3	2	0	0	0	0	Θ
			x1	x2	x3	x4	x5	x6	
0	x3		0		1		0	0	
3	x1	4	1	1/2	0	1/2	0	0	
0	x5		0		0		1	0	
0	x6		0		0		0	1	
	f		0		0		0	0	

Остальные элементы находим, используя метод Жордана-Гаусса.

Таблица. Результат построения симплексной таблицы

$= \frac{2 \cdot 6 - 8 \cdot 1}{2}$

$= \frac{2 \cdot 1 - 1 \cdot 0}{2}$

$C_Б$	Б	b	3	2	0	0	0	0	Θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_3	6	1	2	1	0	0	0	6
0	x_4	8	2	1	0	1	0	0	4
0	x_5	1	-1	1	0	0	1	0	-
0	x_6	2	0	1	0	0	0	1	-
	f	0	-3	-2	0	0	0	0	
0	x_3	2	0	3/2	1	-1/2	0	0	4/3
3	x_1	4	1	1/2	0	1/2	0	0	8
0	x_5	5	0	3/2	0	1/2	1	0	10/3
0	x_6	2	0	1	0	0	0	1	2
	f	12	0	-1/2	0	3/2	0	0	
2	x_2	4/3	0	1	2/3	-1/3	0	0	
3	x_1	10/3	1	0	-1/3	2/3	0	0	
0	x_5	3	0	0	-1	1	1	0	
0	x_6	2/3	0	0	-2/3	1/3	0	1	
	f	14/3	0	0	1/3	4/3	0	0	

Полученный опорный план оптимален. Получили ответ

$$X = \left(3\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3}, 0, 0, 3, \frac{2}{3}\right) \qquad f_{\max} = 12\frac{2}{3}$$

Полученный ответ такой же как и при оптимизации целевой функции графическим способом.

Задание. Оптимизировать данные математические модели симплекс методом. Для решения использовать MS Excel.

Номер варианта	Первая математическая модель	Вторая математическая модель
1	$f = 2x_1 + x_2 - 2x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \quad 8 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \quad 2 \\ -2x_1 - 8x_2 + 3x_3 \quad 1 \\ x_i \quad 0 \ (i = 1,2,3) \end{cases}$	Оптимизировать целевую функцию математической модели, построенной на практической работа №2
2	$f = -3x_1 + x_2 + 4x_3 \to \max$ $\begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -5x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -8x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 3 \\ x_i \quad 0 \ (i = 1,2,3,4,5) \end{cases}$	Оптимизировать целевую функцию математической модели, построенной на практической работа №2
3	$f = -2x_1 + 3x_2 - x_4 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 18 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_4 + x_6 = 24 \\ x_i \quad 0 \ (i = 1,2,3,4,5,6) \end{cases}$	Оптимизировать целевую функцию математической модели, построенной на практической работа №2
4	$f = 9x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 \to \max$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 24 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_5 = 30 \\ x_i \quad 0 \ (i = 1,2,3,4,5) \end{cases}$	Оптимизировать целевую функцию математической модели, построенной на практической работа №2

Номер варианта	Первая математическая модель	Вторая математическая модель
10	$f = 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 7 \\ x_i \quad 0 \quad (i = 1,2,3,4) \end{cases}$	Оптимизировать целевую функцию математической модели, построенной на практической работа №2
11	$f = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 9 \\ 2x_1 + 2x_3 + x_4 = 15 \\ x_i \quad 0 \quad (i = 1,2,3,4) \end{cases}$	Оптимизировать целевую функцию математической модели, построенной на практической работа №2
12	$f = 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ x_2 + x_3 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 10 \\ x_i \quad 0 \quad (i = 1,2,3,4) \end{cases}$	Оптимизировать целевую функцию математической модели, построенной на практической работа №2
6	$f = 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 16 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 14 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ x_i \quad 0 \quad (i = 1,2,3,4) \end{cases}$	Оптимизировать целевую функцию математической модели, построенной на практической работа №2
7	$f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 6 \\ x_i \quad 0 \quad (i = 1,2,3,4) \end{cases}$	Оптимизировать целевую функцию математической модели, построенной на практической работа №2
8	$f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 8 \end{cases}$	Оптимизировать целевую функцию математической модели, по-

14	$f = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \le 4 \\ x_1 + x_3 \le 1 \\ x_i \quad 0 \ \ (i = 1,2,3,4) \end{cases}$	Оптимизировать целевую функцию математической модели, построенной на практической работа №2
15	$f = x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 6x_4 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 \le 1 \\ 5x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 \le 2 \\ x_i \quad 0 \ \ (i = 1,2,3,4) \end{cases}$	Оптимизировать целевую функцию математической модели, построенной на практической работа №2