Законы логики. Равносильные преобразования

Среди тождественно истинных формул алгебры высказываний большую роль в математической логике и её приложениях играют так называемые законы алгебры логики.

Логические выражения	Алгебраические выражения
Переместительный закон (коммутативный)	
$A \lor B = B \lor A$	$A + B = B + A$
$A \land B = B \land A$	$A \cdot B = B \cdot A$
Сочетательный закон (ассоциативный)	
$(A \lor B) \lor C = A \lor (B \lor C)$	$(A + B) + C = A + (B + C)$
$(A \land B) \land C = A \land (B \land C)$	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
Распределительный закон (дистрибутивный)	
$(A \lor B) \land C = (A \land C) \lor (B \land C)$	$(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$
$(A \land B) \lor C = (A \lor C) \land (B \lor C)$	аналога нет
Закон инверсии или формулы де Моргана	
$\overline{A \land B} = \overline{A} \lor \overline{B}$	$\overline{A \lor B} = \overline{A} \land \overline{B}$
Закон двойного отрицания	
$\overline{\overline{A}} = A$	
Закон исключения констант	
Для логического сложения	
$A \lor 0 = A$	$A \lor 1 = 1$
Для логического умножения	
$A \land 0 = 0$	$A \land 1 = A$
Закон идемпотентности от лат. idem potens - равносильный	
Для логического сложения $A \lor A = A$	
Для логического умножения $A \land A = A$	
Закон противоречия	
$A \land \overline{A} = 0$ Невозможно, чтобы противоречивые высказывания были одновременно истинными	
Закон исключения третьего	
$A \lor \overline{A} = 1$ Из двух противоречивых высказываний об одном и том же предмете одно высказывание истинно, а второе – ложно, третье не дано.	
Закон поглощения	
$A \lor (A \land B) = A$ $A \land (A \lor B) = A$ $A \lor (\overline{A} \land B) = A \lor B$ $A \land (\overline{A} \lor B) = A \land B$	
Закон исключения	
$(A \land B) \lor (A \land \overline{B}) = A$ $(A \lor B) \land (A \lor \overline{B}) = A$	
Запись через основные логические операции	
$A \rightarrow B = \overline{A} \lor B$ $A \leftrightarrow B = (A \lor \overline{B}) \land (\overline{A} \lor B)$ $A \leftrightarrow B = (A \land B) \lor (\overline{A} \land \overline{B})$	

Чтобы доказать, что каждый из законов является тождеством истинной формулой достаточно составить таблицу истинности.

Равносильные преобразования формул алгебры логики

Введем на множестве формул алгебры высказываний понятие равносильности формул.

Формулы $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $S\ (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ называются ***равносильными,*** если при всех наборах значение переменных x_i, входящих в них принимает одинаковое значение истинности.

$$F \cong S$$

Заметим, что равносильные формулы могут отличаться не только числом переменных, но и самими переменными.

Рассмотрим теорему, выражающую связь между равносильностью формул и операции эквивалентности.

Теорема – признак равносильности формул алгебры логики.

Две формулы алгебры высказываний F и S равносильны тогда и только тогда, когда $F \leftrightarrow S$ является тождественно истинной $(F \cong S) \Leftrightarrow (F \leftrightarrow S \cong И)$

Задание. Упросить выражения

1. $(X \bigcap (X \bigcup У)) \to \overline{У}$
2. $A \bigcup ((A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C))$