Практические занятия №2-3

Доказательство законов логики. Упрощение формул логики с помощью равносильных преобразований

Цель работы: Научиться преобразовывать формулы, используя законы и основные равносильности.

Содержание работы:

Основные законы и равносильности

Логические выражения	Алгебраические выражения
Переместительный закон (коммутативный)	
$A \lor B = B \lor A$	$A + B = B + A$
$A \land B = B \land A$	$A \cdot B = B \cdot A$
Сочетательный закон (ассоциативный)	
$(A \lor B) \lor C = A \lor (B \lor C)$	$(A + B) + C = A + (B + C)$
$(A \land B) \land C = A \land (B \land C)$	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
Распределительный закон (дистрибутивный)	
$(A \lor B) \land C = (A \land C) \lor (B \land C)$	$(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$
$(A \land B) \lor C = (A \lor C) \land (B \lor C)$	аналога нет
Закон инверсии или формулы де Моргана	
$\overline{A \land B} = \overline{A} \lor \overline{B}$	$\overline{A \lor B} = \overline{A} \land \overline{B}$
Закон двойного отрицания	
$\overline{\overline{A}} = A$	
Закон исключения констант	
Для логического сложения	
$A \lor 0 = A$	$A \lor 1 = 1$
Для логического умножения	
$A \land 0 = 0$	$A \land 1 = A$
Закон идемпотентности от лат. idem potens - равносильный	
Для логического сложения $A \lor A = A$	
Для логического умножения $A \land A = A$	
Закон противоречия	
$A \land \overline{A} = 0$ Невозможно, чтобы противоречивые высказывания были одновременно истинными	
Закон исключения третьего	
$A \lor \overline{A} = 1$ Из двух противоречивых высказываний об одном и том же предмете одно высказывание истинно, а второе – ложно, третье не дано.	
Закон поглощения	
$A \lor (A \land B) = A$	
$A \land (A \lor B) = A$	
$A \lor (\overline{A} \land B) = A \lor B$	
$A \land (\overline{A} \lor B) = A \land B$	
Закон исключения	
$(A \land B) \lor (A \land \overline{B}) = A$	
$(A \lor B) \land (A \lor \overline{B}) = A$	
Запись через основные логические операции	
$A \rightarrow B = \overline{A} \lor B$	
$A \leftrightarrow B = (A \lor \overline{B}) \land (\overline{A} \lor B)$	
$A \leftrightarrow B = (A \land B) \lor (\overline{A} \land \overline{B})$	

Задание. Для заданного логического выражения:
– построить таблицу истинности;
– упростить высказывание, используя равносильные преобразования;
– полученный результат проверить, построив для него таблицу истинности.

Пример выполнения:

Исходные данные:

$$(X \to Y) \wedge (Y \to Z) \to (Z \to X)$$

Решение:

1. □ $(X \overset{\partial 1}{\to} Y) \overset{\partial 4}{\wedge} (Y \overset{\partial 2}{\to} Z) \overset{\partial 5}{\to} (Z \overset{\partial 3}{\to} X)$

2. Составим таблицу истинности для исходного выражения:

X	Y	Z	$\partial 1$	$\partial 2$	$\partial 3$	$\partial 4$	$\partial 5$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

3. Упростим высказывание:
преобразуем импликацию:

$$(X \to Y)(Y \to Z) \to (Z \to X) = \overline{(\overline{X} \vee Y)(\overline{Y} \vee Z)} \vee (\overline{Z} \vee X);$$

воспользуемся законом де Моргана для преобразования инверсии:

$$\overline{(\overline{X} \vee Y)(\overline{Y} \vee Z)} \vee (\overline{Z} \vee X) = \overline{(\overline{X} \vee Y)} \vee \overline{(\overline{Y} \vee Z)} \vee (\overline{Z} \vee X) = \overline{\overline{X}}\overline{Y} \vee \overline{\overline{Y}}\overline{Z} \vee \overline{Z} \vee X;$$

по закону двойного отрицания:

$$\overline{\overline{X}}\overline{Y} \vee \overline{\overline{Y}}\overline{Z} \vee \overline{Z} \vee X = X\overline{Y} \vee Y\overline{Z} \vee \overline{Z} \vee X;$$

перегруппируем высказывание и воспользуемся законом поглощения:

$$X\overline{Y} \vee Y\overline{Z} \vee \overline{Z} \vee X = X\overline{Y} \vee X \vee Y\overline{Z} \vee \overline{Z} = X \vee \overline{Z}$$

4. Составим таблицу истинности для полученного выражения:

X	Y	Z	$\overline{Z}$	$X \vee \overline{Z}$
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1

Вывод: Результирующие столбцы в двух таблицах совпали, следовательно, выполненные преобразования верны.

Задания к практической работе.

1	$(A \leftrightarrow B) \vee A\overline{B} \vee C$	16	$B \vee (A \leftrightarrow CB) \vee A\overline{C}$
2	$(A \to B) \vee A\overline{C} \vee BC$	17	$(AC \to B) \vee AB\overline{C}$
3	$(AC \to B) \vee A\overline{C}$	18	$(\overline{A} \leftrightarrow C)(B\overline{C} \to AB)$
4	$A\overline{B} \vee (A \leftrightarrow C)B$	19	$(B \to C) \vee (B \to AC)$
5	$(\overline{A} \to B)(A\overline{C} \vee BC)$	20	$(AB \to C) \vee A \vee \overline{A}C$
6	$(A \leftrightarrow C) \vee A\overline{B} \vee AC$	21	$(A \leftrightarrow C) \vee (A\overline{B} \to C)$
7	$(A \leftrightarrow C) \vee A\overline{B} \vee BC$	22	$(\overline{A}B \to \overline{C}) \vee ABC$
8	$(C \leftrightarrow B) \vee A\overline{C} \vee BC$	23	$(AB \to C) \vee A\overline{C}$
9	$(BC \to A) \vee A\overline{C}$	24	$(\overline{A} \to BC)(A \leftrightarrow C)$
10	$(AB \to C) \vee A\overline{C}$	25	$(\overline{A} \leftrightarrow B) \vee (A \to BC)$
11	$(\overline{A} \to C)(B\overline{C} \vee AB)$	26	$(\overline{A \to B})(C\overline{A} \to B)$
12	$(\overline{A} \leftrightarrow B)(A \to BC)$	27	$(A \to \overline{B}C) \vee A\overline{B} \vee BC$
13	$(B \to C) \vee A\overline{B} \vee \overline{A}C$	28	$(A \to C) \vee A\overline{B} \vee BC$
14	$(A \to \overline{B}C) \vee A\overline{B} \vee B\overline{C}$	29	$(\overline{A \to B})(B\overline{A} \to C)$
15	$(AC \to \overline{B}) \vee B\overline{C}$	30	$(AB \to \overline{C}) \vee A\overline{B}C$