Алгебра Буля

Множество высказываний с введенными для них логическими операциями дизъюнкции, конъюнкции и отрицания основными законами этих действий называется ***алгеброй Буля***. Алгебра Буля — исторически первый раздел математической логики, разработанный ирландским логиком и математиком Дж. Булем (George Boole (1815—1864) — английский математик и логик, профессор математики Королевского колледжа Корка). В середине XIX в. Буль применил алгебраические методы для решения логических задач и сформулировал на языке алгебры некоторые фундаментальные законы мышления

Законы алгебры Буля.

Коммутативные законы:	Ассоциативные законы:
1. $x \wedge y \equiv y \wedge x$; 2. $x \vee y \equiv y \vee x$;	1. $x \wedge (y \wedge z) \equiv (x \wedge y) \wedge z$; 2. $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$;
Дистрибутивные законы: 1. $x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$; 2. $x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;	Идемпотентные законы: 1. $x \wedge x \equiv x$; 2. $x \vee x \equiv x$;
Законы логического сложения и умножения с 0 и 1: 1. $x \wedge 0 \equiv 0$; 2. $x \vee 0 \equiv x$; 3. $x \wedge 1 \equiv x$; 4. $x \vee 1 \equiv 1$;	Законы операции «черта»: 1. $\overline{\overline{x}} \equiv x$; 2. $x \vee 0 \equiv x$; $x \vee 1 \equiv 1$; 3. $\overline{x} \wedge x \equiv 0$; $\overline{x} \vee x \equiv 1$;
Законы Де Моргана (Augustus de Morgan (1806 - 1871) — шотландский математик и логик; профессор математики в Университетском колледже Лондона): 1. $\overline{x \wedge y} \equiv \overline{x} \vee \overline{y}$; 2. $\overline{x \vee y} \equiv \overline{x} \wedge \overline{y}$.	

Сложением по модулю два (альтернативной дизъюнкцией, логи́ческим сложе́нием, исключа́ющим «ИЛИ», строгой дизъюнкцией) двух высказываний x и y называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда оба высказывания x и y принимают разные значения. Дизъюнкция обозначается $x \oplus y$ (читается: «или x, или y»). Таблица истинности для $x \oplus y$ имеет вид:

x	y	$x \oplus y$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Стрелка Пирса – это отрицание дизъюнкции.

Стрелка Пирса обозначается X ↓ Y. Читается «ни X, ни Y». Введена в рассмотрение Чарльзом Пирсом (Charles Peirce) в 1880—1881 г.г. Таблица истинности для стрелки Пирса имеет вид:

x	y	$x \downarrow y$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Штрих Шеффера – это отрицание конъюнкции.

Введена в рассмотрение Генри Шеффером в 1913 г. (в отдельных источниках именуется как Пунктир Чулкова). Штрих Шеффера обозначается x|y , задаётся следующей таблицей истинности:

x	y	x|y
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Две формулы алгебры логики называются *равносильными* или *эквивалентными*, если они принимают одинаковые логические значения на любом наборе значений входящих в формулы переменных (элементарных высказываний). Равносильность формул будем обозначать знаком «≡».

Равносильность логических формул можно установить при помощи их таблиц истинности.

Пример. С помощью таблиц истинности проверить, являются ли равносильными формулы $x \to (\bar{x} \wedge \bar{y})$ и $\bar{x} \vee \overline{x \vee y}$.

Решение. Составим таблицы истинности для каждой из формул *A* и *B*.

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} \wedge \bar{y}$	$x \to (\bar{x} \wedge \bar{y})$
1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1

x	y	$\bar{x}$	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\bar{x} \vee \overline{x \vee y}$
1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1
0	0	1	0	1	1

Ответ: данные формулы являются равносильными.

Другой способ доказательства равносильности логических формул – их упрощение с использованием *равносильных преобразований*.

Выражения одних логических операций через другие:

$$x \to y \equiv \bar{x} \vee y; \qquad \overline{x \wedge y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y};$$

$$x \leftrightarrow y \equiv (x \to y) \wedge (y \to x); \qquad \overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \wedge \bar{y}.$$

Для упрощения записи формул принят ряд соглашений. Скобки можно опускать, придерживаясь следующего порядка действий: сначала выполняем действия в скобках, затем отрицание, затем выполняется конъюнкция. Если над формулой стоит знак отрицания, то скобки тоже опускаются.

Пример 1. Упростить логическую формулу: $\bar{x} \wedge \bar{y} \to x \vee (x \wedge y)$.

Решение. Используем основные равносильности.

$$\overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} \vee \left(x \vee (y \wedge x)\right) \equiv$$

$$\equiv \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} \vee x \equiv \bar{\bar{x}} \vee \bar{\bar{y}} \vee x \equiv$$

$$\equiv x \vee y \vee x \equiv x \vee x \vee y \equiv x \vee y.$$

Ответ: $x \vee y$.

Пример 2. Являются ли эквивалентными следующие высказывания:

$$x \wedge (y \mid z) \;\; и \;\; (x \wedge y)(x \wedge z)$$

Решение.

Составим таблицы истинности для каждого высказывания.

				1 формула			2 формула
x	y	z	y|z	$x \wedge (y \mid z)$	$x \wedge y$	$x \wedge z$	$(x \wedge y)(x \wedge z)$
1	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0

Значения x и y в пятом и восьмом столбцах не совпадают.

Вывод: данные высказывания не являются эквивалентными

1 вариант

1.Укажите, в каких случаях высказывание истинно, а в каких ложно: $\overline{(A \Rightarrow B)} \Leftrightarrow \left(\bar{B} \wedge \bar{A}\right)$

2.Являются ли эквивалентными следующие высказывания: $\left(x \wedge y\right) \oplus \left(x \wedge z\right)$ и $x \wedge \left(y \oplus z\right)$

3.Решить булево уравнение: $\left(\bar{z} \oplus x\right) \vee \left(\bar{z} \,|\, (y \vee \bar{x})\right) = x \wedge (y \oplus z)$

2 вариант

1.Укажите, в каких случаях высказывание истинно, а в каких ложно: $\left((\overline{A \wedge B}) \Rightarrow A\right) \Leftrightarrow \left(A \downarrow B\right)$

2.Являются ли эквивалентными следующие высказывания: $x|\left(y \wedge z\right)$ и $(x|y) \oplus \left(x|z\right)$

3.Решить булево уравнение: $\left(\bar{z} \vee y\right) \rightarrow \left(\bar{z} \oplus \bar{x}\right) = x \wedge y$

3 вариант

1.Укажите, в каких случаях высказывание истинно, а в каких ложно: $\left((\overline{A \wedge B}) \Rightarrow A\right) \Leftrightarrow (A \vee B)$

2.Являются ли эквивалентными следующие высказывания: $x|\left(y \rightarrow z\right)$ и $(x|y) \rightarrow \left(x|z\right)$

3.Решить булево уравнение: $\left(\bar{z} \Rightarrow y\right) \Leftrightarrow \left(\bar{z} \vee \bar{x}\right) = x \oplus y$

4 вариант

1.Укажите, в каких случаях высказывание истинно, а в каких ложно: $\left(\bar{z} \vee y\right) \rightarrow \left(\bar{z} \oplus \bar{x}\right)$

2.Являются ли эквивалентными следующие высказывания: $\left((\overline{A \wedge B}) \Rightarrow A\right)$ и $A \vee B$

3.Решить булево уравнение: $\left(\bar{z} \vee y\right) \wedge \left(\bar{z} \oplus \bar{x}\right) = x \Rightarrow y$

5 вариант

1. Укажите, в каких случаях высказывание истинно, а в каких ложно: $\left(x \vee \bar{y}\right) \rightarrow \left(\bar{z} \oplus \bar{x}\right)$

2.Являются ли эквивалентными следующие высказывания: $(\overline{A \Rightarrow B}) \Leftrightarrow \left(\bar{B} \wedge \bar{A}\right)$ *и* $\left((A \Rightarrow B) \wedge \bar{B}\right) \Rightarrow A$

3.Решить булево уравнение: $\left(\bar{z} \vee y\right) \oplus \left(\bar{z} \oplus \bar{x}\right) = x|y$

6 вариант

1. Укажите, в каких случаях высказывание истинно, а в каких ложно: $\left(\left(x \downarrow y\right) \rightarrow z\right) \oplus y$

2.Являются ли эквивалентными следующие высказывания: $(x|y) \rightarrow \left(x|z\right)$ *и* $\left(\bar{z} \vee y\right) \rightarrow \left(\bar{z} \oplus \bar{x}\right)$

3.Решить булево уравнение: $\left(\bar{z} \vee y\right) \rightarrow \left(\bar{z} \,|\, (y \vee \bar{x})\right) = x \wedge y$

7 вариант

1.Укажите, в каких случаях высказывание истинно, а в каких ложно: $((A \vee B) \wedge B) \Rightarrow \bar{A}$

2.Являются ли эквивалентными следующие высказывания: $x|\left(y \Rightarrow z\right)$ и $(x|y) \vee \left(x|z\right)$

3.Решить булево уравнение: $\left(\bar{z} \Leftrightarrow y\right) \Leftrightarrow \left(\bar{z} \,|\, (y \oplus \bar{x})\right) = z \wedge y$

8 вариант

1.Укажите, в каких случаях высказывание истинно, а в каких ложно: $\overline{\left(z \rightarrow x\right) \leftrightarrow \left(y|x\right)}$

2.Являются ли эквивалентными следующие высказывания: $(\overline{A \Rightarrow B}) \vee \left(\bar{B} \wedge \bar{A}\right)$ *и* $\left((A \Rightarrow B) \wedge \bar{B}\right) \oplus A$

3.Решить булево уравнение: $\left(\bar{z} \vee x\right) \Leftrightarrow \left(\bar{z} \,|\, (y \vee \bar{x})\right) = y$

9 вариант

1.Укажите, в каких случаях высказывание истинно, а в каких ложно: $\left(A\vee B\wedge \bar{A}\right)\Leftrightarrow \bar{A}$

2.Являются ли эквивалентными следующие высказывания: $\left(x\wedge y\right)\vee\left(x\wedge z\right)$ и $x\oplus\left(y\vee z\right)$

3.Решить булево уравнение: $\left(x\vee \bar{y}\right)\rightarrow\overline{\left(z\leftrightarrow \bar{x}\right)}$=1

10 вариант

1.Укажите, в каких случаях высказывание истинно, а в каких ложно: $\overline{\left(x|\bar{y}\right)\oplus\left(z\rightarrow \bar{x}\right)}$

2.Являются ли эквивалентными следующие высказывания: $(\overline{A\Rightarrow B})\vee\left(\bar{B}\wedge \bar{A}\right)$ *и* $\left(\left(A\Rightarrow B\right)\oplus \bar{B}\right)\vee A$

3.Решить булево уравнение: $\left(\left(A\vee B\right)\oplus \bar{B}\right)\Rightarrow A$=0

11 вариант

1.Укажите, в каких случаях высказывание истинно, а в каких ложно: $\left(\left(A\vee B\right)\wedge B\right)\Rightarrow \bar{A}$

2.Являются ли эквивалентными следующие высказывания: $x|\left(y\oplus z\right)$ и $(x|y)\vee\left(x|z\right)$

3.Решить булево уравнение: $(\overline{A\vee B})\Leftrightarrow\left(\bar{B}\wedge \bar{A}\right)$=0

12 вариант

1. Укажите, в каких случаях высказывание истинно, а в каких ложно: $\overline{\left(z\rightarrow x\right)\leftrightarrow\left(y|x\right)}$

2.Являются ли эквивалентными следующие высказывания: $(\overline{A\vee B})\vee\left(\bar{B}\wedge \bar{A}\right)$ *и* $\left(\left(A\vee B\right)\oplus \bar{B}\right)\Rightarrow A$

3.Решить булево уравнение: $\left(\bar{z}\oplus y\right)\vee\left(\bar{z}\,|(y\vee \bar{x})\right)=x\wedge y$

13 вариант

1.Укажите, в каких случаях высказывание истинно, а в каких ложно: $\left(x|\bar{y}\right)\oplus\left(\bar{z}\rightarrow x\right)$

2.Являются ли эквивалентными следующие высказывания: $(\overline{A\oplus B})\Leftrightarrow\left(\bar{B}\oplus \bar{A}\right)$ *и* $A\Rightarrow\left(\left(A\vee B\right)\wedge \bar{B}\right)$

3.Решить булево уравнение: $\left(\bar{z}\Rightarrow y\right)\oplus\left(\bar{z}\,|(y\vee \bar{x})\right)=x\oplus y$

14 вариант

1.Укажите, в каких случаях высказывание истинно, а в каких ложно: $\left(x\wedge y\right)\oplus\left(x\wedge z\right)$

2.Являются ли эквивалентными следующие высказывания: $(\overline{A\Rightarrow B})\wedge\left(\bar{B}\Leftrightarrow \bar{A}\right)$ *и* $\left(\left(A\Rightarrow B\right)\wedge \bar{B}\right)\oplus A$

3.Решить булево уравнение: $\left(\bar{z}\Leftrightarrow y\right)\vee\left(\bar{z}\,|(z\vee \bar{x})\right)=x\Rightarrow z$

15 вариант

1.Укажите, в каких случаях высказывание истинно, а в каких ложно: $(x|y)\rightarrow\left(x|z\right)$

2.Являются ли эквивалентными следующие высказывания: $(\overline{A\wedge B})\Leftrightarrow\left(\bar{B}\oplus \bar{A}\right)$ *и* $\left(A\vee B\right)\oplus\left(A\oplus \bar{B}\right)$

3.Решить булево уравнение: $\left(\bar{z}\oplus y\right)\Rightarrow\left(\bar{z}\,|(y\vee \bar{x})\right)=z$