Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы (ДНФ и КНФ)

Определение 1. ***Элементарной конъюнкцией*** называют конъюнкцию элементарных высказываний или их отрицаний (в частности допускается элементарная конъюнкция с одним сомножителем).

Пример. $A \wedge \overline{B}, X \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z}, \overline{C} \wedge \overline{D}, E$.

Определение 2. ***Элементарной дизъюнкцией*** называют дизъюнкцию элементарных высказываний или их отрицаний (в частности допускается элементарная дизъюнкция с одним слагаемым).

Пример. $A \vee \overline{B}, \overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z, \overline{A} \vee B \vee C \vee \overline{D}, \overline{C}$.

Определение 3. ***Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)*** формулы U называется равносильная ей формула, представляющая собой дизъюнкцию элементарных конъюнкций.

Пример. $U = \left(A \wedge \overline{B}\right) \vee (A \wedge B \wedge C) \vee \left(\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}\right) \vee C$.

Определение 4. ***Конъюнктивной нормальной формой (КНФ)*** формулы U называется равносильная ей формула, представляющая собой конъюнкцию элементарных дизъюнкций.

Пример. $U = \left(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z\right) \wedge (X \vee Z) \wedge \overline{Y}$.

Каждая формула алгебры высказываний имеет как ДНФ, так и КНФ.

Способ нахождения ДНФ и КНФ.

1. Избавляемся от → и ↔ с помощью основных равносильностей.
2. Переносим знак отрицания на элементарные высказывания с помощью законов де Моргана.
3. Избавляемся от двойных отрицаний с помощью соответствующего закона.
4. Используем дистрибутивный, коммутативный и ассоциативный законы.

Пример. Найти и упростить ДНФ.

$$(\overline{X} \to Z) \wedge (X \to \overline{Y} \wedge Z) = (\overline{\overline{X}} \vee Z)(\overline{X} \vee \overline{Y}Z) = (X \vee Z)(\overline{X} \vee \overline{Y}Z) = X\overline{X} \vee X\overline{Y}Z \vee \overline{X}Z \vee Z\overline{Y}Z$$
$$= X\overline{Y}Z \vee \overline{X}Z \vee \overline{Y}Z = \overline{X}Z \vee \overline{Y}Z$$

Пример. Найти и упростить КНФ.

$$(\overline{X} \to Z) \wedge (X \to \overline{Y} \wedge Z) = (\overline{\overline{X}} \vee Z)(\overline{X} \vee \overline{Y}Z) = (X \vee Z)(\overline{X} \vee \overline{Y}Z) = (X \vee Z)(\overline{X} \vee \overline{Y})(\overline{X} \vee Z)$$
$$= (\overline{X} \vee \overline{Y})(Z \vee X\overline{X}) = (\overline{X} \vee \overline{Y})Z$$

Критерии тождественной истинности и тождественной ложности формул.

Теорема 1. (Критерий тождественной истинности.)

Формула алгебры высказываний тождественно истинна тогда и только тогда, когда каждый сомножитель ее КНФ содержит некоторую букву одновременно с ее отрицанием.

Пример. Доказать тождественную истинность следующей формулы.

$$X \to \left(\overline{Y} \to X\overline{Y}\right) = \overline{X} \vee \left(\overline{\overline{Y}} \vee X\overline{Y}\right) = \overline{X} \vee \left(Y \vee X\overline{Y}\right) = \overline{X} \vee Y \vee X\overline{Y} = \left(\overline{X} \vee Y \vee X\right)\left(\overline{X} \vee Y \vee \overline{Y}\right)$$

Формула тождественно истинная.

Теорема 2. (Критерий тождественной ложности.)

Формула алгебры высказываний тождественно ложна тогда и только тогда, когда каждое слагаемое ее ДНФ содержит некоторую букву одновременно с ее отрицанием.

Совершенные дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы (СДНФ и СКНФ)

Среди всевозможных ДНФ выделим более узкий класс СДНФ.

Определение 5. ДНФ формулы U, составленной из пропозициональных букв $\boldsymbol{X_1, X_2, \ldots, X_n}$, называется ***совершенной***, если выполнены следующие четыре условия:

1. каждая буква X_i ($i = 1 \ldots n$) входит в каждое слагаемое или с отрицанием или без отрицания;
2. ни одна из букв X_i ($i = 1 \ldots n$) не входит ни в одно из слагаемых одновременно с отрицанием и без отрицания;
3. ни в одном из слагаемых нет одинаковых сомножителей;
4. в ДНФ нет одинаковых слагаемых.

Пример. $U = (A \wedge \overline{B} \wedge C) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}) \vee (A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C})$ - *СДНФ.*

Тождественно ложные формулы не имеют СДНФ. Это следует из критерия тождественной ложности и пункта 2 данного определения. Каждая не тождественно ложная формула имеет СДНФ.

<u>Способ нахождения СДНФ.</u>

Пусть некоторая не тождественно ложная формула уже приведена к ДНФ.

1. Допустим, что некоторая буква X_i (i = 1…n) не входит в некоторое слагаемое S ни с отрицанием, ни без него. Тогда это слагаемое S мы должны заменить на дизъюнкцию двух слагаемых $SX_i \vee S\overline{X_i}$. Докажем, что от этого равносильность формулы не нарушится:

$$SX_i \vee S\overline{X_i} = S(X_i \vee \overline{X_i}) = S \vee 1 = S$$

2. Допустим, что некоторая буква X_i (i = 1…n) входит в некоторое слагаемое S одновременно с ее отрицанием. Тогда в силу закона противоречия это слагаемое будет ложным и его можно опустить. Так как по условию формула U не тождественно ложна, то не все слагаемые будут опущены.

3. Допустим, что в некотором слагаемом S содержатся одинаковые сомножители. Тогда в силу идемпотентного закона *(XX=X)* повторные сомножители можно будет опустить.

4. Допустим, что ДНФ содержит одинаковые слагаемые. Тогда в силу идемпотентного закона *(X\V X=X)* повторные слагаемые можно опустить.

Пример.

$$(A \rightarrow \overline{B} \wedge C) \wedge (A \rightarrow C) = (\overline{A} \vee \overline{B} \wedge C) \wedge (\overline{A} \vee C) = \overline{AA} \vee \overline{A}C \vee \overline{AB}C \vee \overline{B}CC = \overline{A} \vee \overline{A}C \vee \overline{AB}C \vee \overline{B}C$$
$$= \overline{A}B \vee \overline{A}\,\overline{B} \vee \overline{A}BC \vee \overline{AB}C \vee A\overline{B}C \vee \overline{AB}C$$
$$= \overline{A}BC \vee \overline{A}B\overline{C} \vee \overline{AB}C \vee \overline{ABC} \vee \overline{A}BC \vee \overline{AB}C \vee A\overline{B}C = \overline{A}BC \vee \overline{A}B\overline{C} \vee \overline{AB}C \vee \overline{ABC} \vee A\overline{B}C$$

Последняя формула является СДНФ.

Среди всевозможных КНФ выделим более узкий класс СКНФ.

Определение 6. КНФ формулы ***U,*** состоящей из пропозициональных букв X_x, X_2, …, X_n, называется ***совершенной***, если выполняются следующие четыре условия:

1. каждая буква $X_{\{}$ *(i = \,n)* входит в каждый сомножитель или с отрицанием или без отрицания;
2. ни одна из букв $X_г$ (г =1,и) не входит ни в один из сомножителей одновременно с отрицанием и без отрицания;
3. ни в одном из сомножителей нет одинаковых слагаемых;
4. в КНФ нет одинаковых сомножителей.

Пример. $U = (X \vee \overline{Y} \vee Z)(X \vee Y \vee Z)(\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z})(X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z})$ - *СКНФ.*

Тождественно истинные формулы не имеют СКНФ. Это следует из критерия тождественной истинности и пункта 2 данного определения. Каждая не тождественно истинная формула может быть приведена к СКНФ.

<u>Способ нахождения СКНФ.</u>

Пусть некоторая не тождественно истинная формула уже приведена к КНФ.

1. Пусть некоторая буква X_i *(i = 1..n)* не входит в некоторый сомножитель S ни с отрицанием, ни без него. Тогда этот сомножитель S мы должны будем заменить на конъюнкцию двух сомножителей $(S \vee X_i)(S \vee \overline{X_i})$. Докажем, что от этого равносильность формулы не нарушится: $(S \vee X_i)(S \vee \overline{X_i}) = S \vee X_i\overline{X_i} = S \vee 0 = S$.

2. Пусть некоторая буква X_t *(i = l..n)* входит в некоторый сомножитель S одновременно со своим отрицанием. Тогда в силу закона исключения третьего этот сомножитель является истинным и его можно опустить. Так как по условию формула не тождественно истина, то не все сомножители будут опущены.

3. Пусть некоторый сомножитель S содержит одинаковые слагаемые. Тогда в силу идемпотентного закона *X VX=X* повторные слагаемые можно опустить.

4. Пусть КНФ содержит одинаковые сомножители. Тогда в силу идемпотентного закона *XX=X* повторные сомножители можно опустить.

Пример.

$$(A \rightarrow \overline{B} \wedge C) \wedge (A \rightarrow C) = (\overline{A} \vee \overline{B} \wedge C) \wedge (\overline{A} \vee C) = (\overline{A} \vee \overline{B})(\overline{A} \vee C)(\overline{A} \vee C) = (\overline{A} \vee \overline{B})(\overline{A} \vee C)$$

П

$$= (\overline{A} \vee \overline{B} \vee C)(\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C})(\overline{A} \vee B \vee C)(\overline{A} \vee \overline{B} \vee C) = (\overline{A} \vee \overline{B} \vee C)(\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C})(\overline{A} \vee B \vee C)$$

ос

ледняя формула является СКНФ.