

## Приведение формул к совершенным нормальным формам по таблицам истинности.

Цель работы: знать, что такое ДНФ и КНФ, уметь приводить формулы алгебры логики к СДНФ и СКНФ и минимизировать их с помощью законов алгебры логики.

### Ход работы.

#### ТОЖДЕСТВЕННО-ИСТИННЫЕ И ТОЖДЕСТВЕННО-ЛОЖНЫЕ ФОРМУЛЫ.

Определение. Формула называется *тождественно-истинной (тавтологией)*, если для любых наборов переменных она принимает значение И.

Определение. Формула называется *тождественно-ложной*, если для любых наборов переменных она принимает значение Л.

В алгебре высказываний используют две нормальные формы: дизъюнктивную и конъюнктивную нормальные формы формулы (ДНФ и КНФ).

*Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)* называется дизъюнкция простых конъюнкций.

*Конъюнктивной нормальной формой (КНФ)* формулы есть формула, равносильная исходной формуле логики высказываний и записанная в виде конъюнкции элементарных дизъюнкций переменных.

Каждая формула, не равная тождественно Л, может быть приведена СДНФ, которая является единственной с точностью до перестановки дизъюнктивных членов.

Каждая формула, не равная тождественно И, может быть приведена к СКНФ, которая является единственной с точностью до перестановки конъюнктивных членов.

*Совершенная дизъюнктивная нормальная форма формулы (СДНФ)* это равносильная ей формула, представляющая собой дизъюнкцию элементарных конъюнкций, обладающая свойствами:

1. Каждое логическое слагаемое формулы содержит все высказывания, входящие в формулу.
2. Все логические слагаемые формулы различны
3. Ни одно логическое слагаемое не содержит высказывание и его отрицание
4. Ни одно логическое слагаемое формулы не содержит одно и то же высказывание дважды.

#### Алгоритм получения СКНФ по таблице истинности:

- 1) Отметить те строки, в последнем столбце которых стоят из 0;
- 2) Выписать для каждой отмеченной строки дизъюнкцию всех переменных следующим образом: если значение некоторой переменной в данной строке =0, то в дизъюнкцию включают саму эту переменную, если =1, то ее отрицание;
- 3) Все полученные дизъюнкции связать в конъюнкцию.

Пример. Построить таблицу истинности для высказывания:  $(x \mid \bar{y}) \rightarrow (y \oplus z)$ , построить СДНФ, СКНФ, найти минимальную ДНФ.

### Решение.

Строим таблицу истинности, с помощью которой устанавливается истинностное значение сложного высказывания при данных значениях входящих в него простых высказываний.

x	y	z	$\bar{y}$	$x \mid \bar{y}$	$y \oplus z$	$(x \mid \bar{y}) \rightarrow (y \oplus z)$
1	1	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	0	0

По таблице составляем дизъюнктивную нормальную форму (ДНФ). ДНФ в булевой логике — нормальная форма, в которой булева формула имеет вид дизъюнкции нескольких конъюнктов.

### Алгоритм получения СДНФ по таблице истинности:

- 1) Отметить те строки, в последнем столбце которых стоят 1;
- 2) Выписать для каждой отмеченной строки конъюнкцию всех переменных следующим образом: если значение некоторой переменной в данной строке =1, то в конъюнкцию включают саму эту переменную, если =0, то ее отрицание;
- 3) Все полученные конъюнкции связать в дизъюнкцию:

Выбираем в таблице строки, в которых булева функция принимает значение 1. В данном случае – это 2-ая, 3-ая, 4-ая, 6-ая и 7-ая строки.

Для каждой строки составляем конъюнкцию: если значение переменной равно 0, то берем ее отрицание, а если 1, то берем саму переменную. Затем составляем дизъюнкцию полученных конъюнкций:

$$f(x, y, z) = (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) - \text{СДНФ}$$

Выбираем в таблице строки, в которых булева функция принимает значение 0. В данном случае – это 1-ая, 5-ая, и 8-ая строки:

$$f(x, y, z) = (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge y \wedge z) - \text{СКНФ}$$

ДНФ называется *минимальной*, если она содержит наименьшее число букв среди всех ДНФ ей равносильных.

Метод Квайна основывается на применении двух основных соотношений.

Соотношение склеивания:

$$(a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge b) = b; \quad (a \vee b) \wedge (\bar{a} \vee b) = b$$

Соотношение поглощения:

$$a \wedge (a \vee b) = a \vee (a \wedge b) = a$$

Используя соотношение склеивания получаем:

$$(\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) = \bar{y} \wedge \bar{z},$$

$$(x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge y \wedge z) = x \wedge y.$$

Отсюда,

$$(\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge y \wedge z) = (\bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge y) - \text{сокращенная ДНФ.}$$

**Задание.** Построить таблицу истинности, найти СНДФ, СКНФ, найти минимальную ДНФ для высказывания:

<p>1В.</p> <p>1. <math>(\bar{z} \vee y) \rightarrow (\bar{z} \oplus \bar{x})</math></p> <p>2. <math>\left( (\overline{A \wedge B}) \Rightarrow A \right) \Rightarrow A \vee B</math></p> <p>3. <math>(\bar{z} \vee y) \wedge (\bar{z} \oplus \bar{x})</math></p>	<p>2В.</p> <p>1. <math>\left( (\overline{A \wedge B}) \Rightarrow A \right) \Leftrightarrow (A \vee B)</math></p> <p>2. <math>x (y \rightarrow z) \oplus (x y) \rightarrow (x z)</math></p> <p>3. <math>(\bar{z} \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\bar{z} \vee \bar{x})</math></p>
<p>3В</p> <p>1. <math>(x y) \rightarrow (x z)</math></p> <p>2. <math>(\overline{A \wedge B}) \Leftrightarrow (\bar{B} \oplus \bar{A}) \Leftrightarrow (A \vee B) \oplus (A \oplus \bar{B})</math></p> <p>3. <math>(\bar{z} \oplus y) \Rightarrow (\bar{z} (y \vee \bar{x}))</math></p>	<p>4В.</p> <p>1. <math>(\overline{A \Rightarrow B}) \Leftrightarrow (\bar{B} \wedge \bar{A})</math></p> <p>2. <math>(x \wedge y) \oplus (x \wedge z) \Leftrightarrow x \wedge (y \oplus z)</math></p> <p>3. <math>(\bar{z} \oplus x) \vee (\bar{z} (y \vee \bar{x}))</math></p>
<p>5В</p> <p>1. <math>((x \downarrow y) \rightarrow z) \oplus y</math></p> <p>2. <math>(x y) \rightarrow (x z) \oplus (\bar{z} \vee y) \rightarrow (\bar{z} \oplus \bar{x})</math></p> <p>3. <math>(\bar{z} \vee y) \rightarrow (\bar{z} (y \vee \bar{x}))</math></p>	<p>6В</p> <p>1. <math>(x \vee \bar{y}) \rightarrow (\bar{z} \oplus \bar{x})</math></p> <p>2. <math>(\overline{A \Rightarrow B}) \Leftrightarrow (\bar{B} \wedge \bar{A}) \oplus ((A \Rightarrow B) \wedge \bar{B}) \Rightarrow A</math></p> <p>3. <math>(\bar{z} \vee y) \oplus (\bar{z} \oplus \bar{x})</math></p>
<p>7В.</p> <p>1. <math>(\bar{z} \rightarrow x) \Leftrightarrow (y x)</math></p> <p>2. <math>(\overline{A \Rightarrow B}) \vee (\bar{B} \wedge \bar{A}) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge \bar{B}) \oplus A</math></p> <p>3. <math>(\bar{z} \vee x) \Leftrightarrow (\bar{z} (y \vee \bar{x}))</math></p>	<p>8В.</p> <p>1. <math>((A \vee B) \wedge B) \Rightarrow A</math></p> <p>2. <math>x (y \Rightarrow z) \Leftrightarrow (x y) \vee (x z)</math></p> <p>3. <math>(\bar{z} \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow (\bar{z} (y \oplus \bar{x}))</math></p>
<p>9В</p> <p>1. <math>(x \bar{y}) \oplus (z \rightarrow \bar{x})</math></p> <p>2. <math>(\overline{A \Rightarrow B}) \vee (\bar{B} \wedge \bar{A}) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \oplus \bar{B}) \vee A</math></p> <p>3. <math>((A \vee B) \oplus \bar{B}) \Rightarrow A</math></p>	<p>10В.</p> <p>1. <math>\left( A \vee B \wedge A \right) \Leftrightarrow A</math></p> <p>2. <math>(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \Rightarrow x \oplus (y \vee z)</math></p> <p>3. <math>(x \vee \bar{y}) \rightarrow (\bar{z} \Leftrightarrow \bar{x})</math></p>
<p>11В.</p> <p>1. <math>(\bar{z} \rightarrow x) \Leftrightarrow (y x)</math></p> <p>2. <math>(\overline{A \vee B}) \vee (\bar{B} \wedge \bar{A}) \Leftrightarrow ((A \vee B) \oplus \bar{B}) \Rightarrow A</math></p> <p>3. <math>(\bar{z} \oplus y) \vee (\bar{z} (y \vee \bar{x}))</math></p>	<p>12В.</p> <p>1. <math>((A \vee B) \wedge B) \Rightarrow A</math></p> <p>2. <math>x (y \oplus z) \oplus (x y) \vee (x z)</math></p> <p>3. <math>(\overline{A \vee B}) \Leftrightarrow (\bar{B} \wedge \bar{A})</math></p>
<p>13В.</p> <p>1. <math>(x \wedge y) \oplus (x \wedge z)</math></p> <p>2. <math>(\overline{A \Rightarrow B}) \wedge (\bar{B} \Leftrightarrow \bar{A}) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge \bar{B}) \oplus A</math></p> <p>3. <math>(\bar{z} \Leftrightarrow y) \vee (\bar{z} (z \vee \bar{x}))</math></p>	<p>14В</p> <p>1. <math>(x \bar{y}) \oplus (\bar{z} \rightarrow x)</math></p> <p>2. <math>(\overline{A \oplus B}) \Leftrightarrow (\bar{B} \oplus \bar{A}) \Leftrightarrow A \Rightarrow ((A \vee B) \wedge \bar{B})</math></p> <p>3. <math>(\bar{z} \Rightarrow y) \oplus (\bar{z} (y \vee \bar{x}))</math></p>
<p>15В</p> <p>1. <math>\left( (\overline{A \wedge B}) \Rightarrow A \right) \Leftrightarrow (A \downarrow B)</math></p> <p>2. <math>x (y \wedge z) \Rightarrow (x y) \oplus (x z)</math></p> <p>3. <math>(\bar{z} \vee y) \rightarrow (\bar{z} \oplus \bar{x})</math></p>	